1. Mathematische Grundlagen:

Wir entwickeln zunächst die mathematischen Grundlagen, die für die Formulierung der Elektrodynamik notwendig sind. Hierzu beginnen wir mit der Vektoranalysis und erläutern die Definitionen der drei Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation. Darauf aufbauend diskutieren wir dann die Integralsätze von Gauß und Stokes.

1.1 Anschauliche Definitionen:

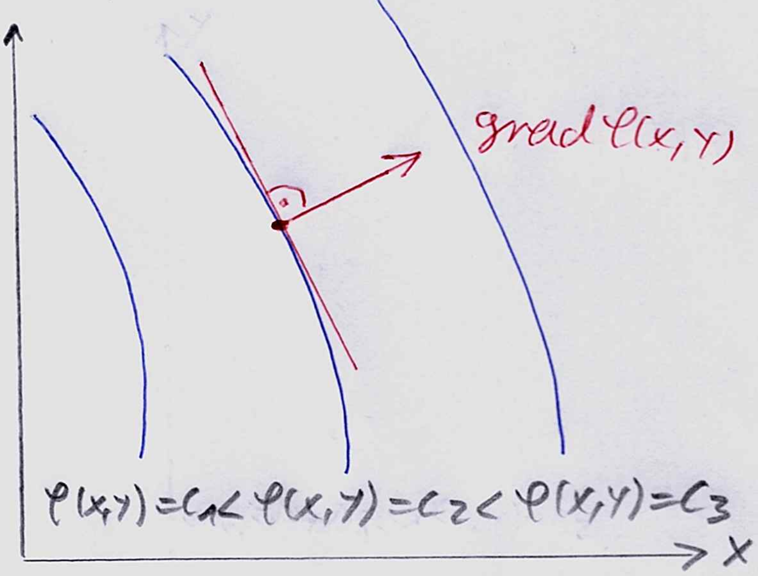
Wir betrachten ein beliebiges Skalarfeld $\varphi(\vec{r})$ und ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$. Für die im folgenden untersuchten partiellen Ortsableitungen spielt eine eventuelle zusätzliche Zeitabhängigkeit der Felder keine Rolle, so dass diese in der Notation unterdrückt wird.

1.1.1 Gradient:

Der Gradient eines Skalarfeldes $\varphi(\vec{r})$ wird mit $\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ bezeichnet. Eine infinitesimale Änderung des Skalarfeldes $d\varphi(\vec{r})$ ist durch das Skalarprodukt des Vektorfeldes $\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ mit einem infinitesimalen Ortsvektor $d\vec{r}$ gegeben:

$$d\varphi(\vec{r}) = \operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (1.1)$$

Der Vektor $\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ steht senkrecht auf den Flächen $\varphi(\vec{r}) = \text{konst.}$ Er zeigt in Richtung des stärksten Anstieges und sein Betrag ist proportional zu diesem Anstieg.

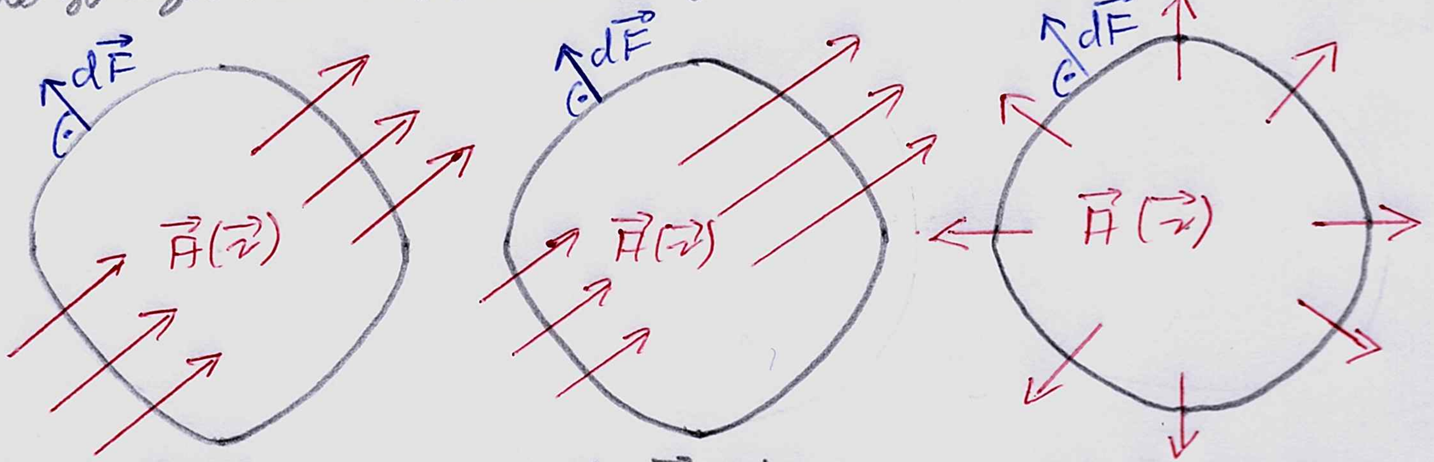


1.1.2 Divergenz:

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ wird mit $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})$ bezeichnet. Zur Definition des Skalarfeldes $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})$ wird der Fluß $\oint_{\Delta F}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{F}$ des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ durch die Oberfläche ΔF eines Volumens ΔV auf das Volumen ΔV bezogen:

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{F} \qquad (1.2)$$

Man bezeichnet $\oint_{\Delta F}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{F}$ auch als die Quellstärke und $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})$ als die Quelldichte des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$. Wir veranschaulichen diese Begriffsbildung durch die folgenden Abbildungen:



a) $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0$ b) $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) > 0$ c) $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) \gg 0$

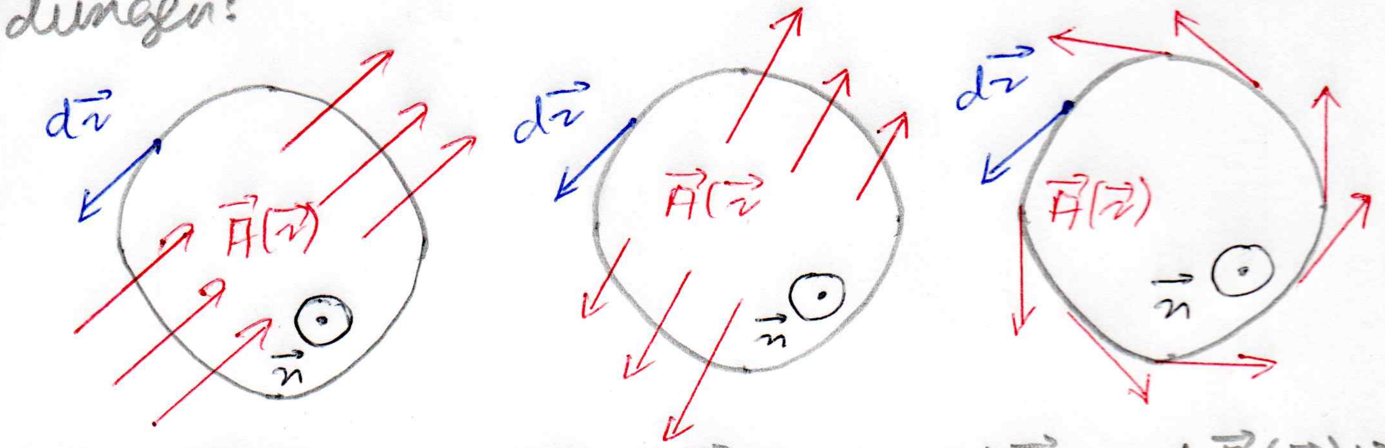
a) Wenn $\vec{A}(\vec{r})$ im Bereich des Volumens konstant ist, verschwindet die Divergenz $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})$. b) Nimmt $\vec{A}(\vec{r})$ dagegen innerhalb des Volumens zu, so ist $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})$ positiv. c) Die Divergenz wir maximal, wenn das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ immer parallel zum Flächenvektor $d\vec{F}$ ist.

1.1.3 Rotation:

Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ wird mit $\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$ bezeichnet. Die Komponente des Vektorfeldes $\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$ in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors $\vec{n}$ wird folgendermaßen definiert. Wir betrachten ein Flächenelement ΔF parallel zu $\vec{n}$ am Orte $\vec{r}$ und bezeichnen die Zirkulation $\oint_{\Delta C}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ entlang des Randes ΔC des Flächenelementes ΔF auf das Flächenelement ΔF:

$$\vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta F\to 0} \frac{1}{\Delta F}\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\,,\quad \vec{n} = \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta F} \qquad (1.3)$$

Man bezeichnet $\oint_{\Delta C}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ auch als die Wirbelstärke und $\vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$ als die Wirbeldichte des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ in Richtung von $\vec{n}$. Wir veranschaulichen diese Begriffsbildung durch die folgenden Abbildungen:



a) $\vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = 0$ b) $\vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) > 0$ c) $\vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) \gg 0$

a) Wenn $\vec{A}(\vec{r})$ im Bereich des Flächenelementes konstant ist, verschwindet die Rotation. b) Nimmt $\vec{A}(\vec{r})$ wie gezeigt zu, ist $\vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$ positiv. c) Die Rotation wird maximal, wenn das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ immer parallel zum Wegelement $d\vec{r}$ ist.

1.2 Kartesische Koordinaten:

Die Definitionen (1.1) – (1.3) verdeutlichen die Bedeutung der drei Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation für physikalische Felder. Außerdem sind sie von der Koordinatenwahl unabhängig, d.h. aus ihnen können die Differentialoperatoren in beliebigen Koordinaten wie z.B. in Kugelkoordinaten oder in kartesischen Koordinaten abgeleitet werden.

1.2.1 Gradient:

Wir werten nun (1.1) in kartesischen Koordinaten aus. Für die linke Seite erhalten wir:

$$d\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}+d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z}dz \quad (1.4)$$

Entsprechend geht die rechte Seite über in

$$d\varphi(\vec{r}) = (\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}))_x dx + (\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}))_y dy + \operatorname{grad}\varphi(\vec{r})_z dz \quad (1.5)$$

Der Vergleich von (1.4) und (1.5) führt auf

$$\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Demnach sind die Komponenten des Vektorfeldes $\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ gerade die ersten partiellen Ableitungen des Skalarfeldes $\varphi(\vec{r})$. Mit Hilfe des Nabla-Operators

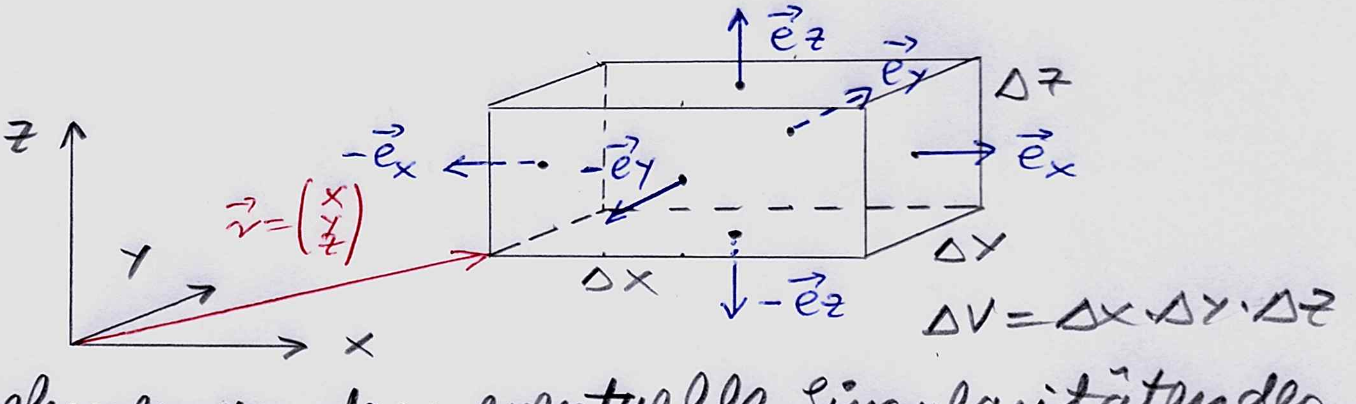
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

erhalten wir

$$\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}). \quad (1.8)$$

1.2.2 Divergenz:

Zur Berechnung der Divergenz in kartesischen Koordinaten werten wir (1.2) für einen infinitesimalen Quader mit achsenparallelen Kanten aus:



Wir nehmen an, dass eventuelle Singularitäten des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ außerhalb des Quaders liegen. Der Fluß $\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$ setzt sich insgesamt aus sechs Summanden zusammen:

$$\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{F} = \int_{y}^{y+\Delta y} dy' \int_{z}^{z+\Delta z} dz' \Big\{ \vec{A}(x+\Delta x, y', z')\cdot \vec{e}_x$$
$$+ \vec{A}(x, y', z')\cdot(-\vec{e}_x) \Big\} + 4 \text{ weitere Terme} \qquad (1.9)$$

Es sollen nun $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ so klein gewählt werden, dass sich das Vektorfeld im Innern des Quaders nur schwach ändert:

$$\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{F} \approx \int_{y}^{y+\Delta y} dy' \int_{z}^{z+\Delta z} dz' \Big\{ A_x(x,y,z)$$
$$+ \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x}\Delta x - A_x(x,y,z) \Big\} + \text{weitere Terme}$$
$$\approx \left\{ \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \right\}\cdot \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (1.10)$$

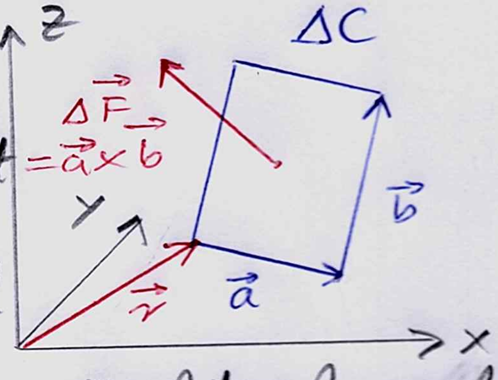
Mit dem Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ folgt aus (1.2) und (1.10) die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \qquad (1.11)$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators in (1.7) geht (1.11) über in

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) \qquad (1.12)$$

1.2.3 Rotation:



Wir betrachten ein Parallelogramm im Raum mit den Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, das den Punkt $\vec{r}$ als Eckpunkt enthält und setzen $\Delta\vec{F} = \vec{a}\times\vec{b}$. Es bezeichnet ΔC den orientierten Rand des Parallelogramms, wobei der Umlaufsinn von ΔC mit $\Delta\vec{F}$ eine Rechtsschraube ist. Das bedeutet, dass das Parallelogramm entlang von ΔC immer links liegt.

Wir nehmen an, dass eventuelle Singularitäten des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ außerhalb des Parallelogramms liegen. Um die Zirkulation $\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ zu berechnen, wird der Integrationsweg wie folgt parametrisiert:

von $\vec{r}$ nach $\vec{r}+\vec{a}$: $\quad \vec{r}(s) = \vec{r} + s\vec{a}, \; 0 \le s \le 1$

von $\vec{r}+\vec{a}$ nach $\vec{r}+\vec{a}+\vec{b}$: $\quad \vec{r}(t) = \vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}, \; 0 \le t \le 1$

von $\vec{r}+\vec{a}+\vec{b}$ nach $\vec{r}+\vec{b}$: $\quad \vec{r}(s)=\vec{r}+(1-s)\vec{a}+\vec{b}, \; 0\le s\le 1$

von $\vec{r}+\vec{b}$ nach $\vec{b}$: $\quad \vec{r}(t)=\vec{r}+(1-t)\vec{b}, \; 0\le t\le 1$

Hieraus ergibt sich für die Zirkulation:

$$\oint_{\Delta C}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_0^1 ds\,\vec{A}(\vec{r}+sa)\cdot\vec{a}+\int_0^1 dt\,\vec{A}(\vec{r}+\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}$$
$$+\int_0^1 ds\,\vec{A}\left(\vec{r}+(1-s)\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot(-\vec{a})+\int_0^1 dt\,\vec{A}\left(\vec{r}+(1-t)\vec{b}\right)\cdot(-\vec{b})$$
$$=\int_0^1 dt\,\left\{\vec{A}(\vec{r}+\vec{a}+t\vec{b})-\vec{A}(\vec{r}+t\vec{b})\right\}\cdot\vec{b}$$
$$-\int_0^1 ds\,\left\{\vec{A}(\vec{r}+s\vec{a}+\vec{b})-\vec{A}(\vec{r}+s\vec{a})\right\}\cdot\vec{a} \qquad (1.13)$$

Für ein Skalarfeld $\varphi(\vec{r})$ gilt für kleine $d\vec{r}$:

$$\varphi(\vec{r}+d\vec{r})-\varphi(\vec{r})\overset{(1.1)}{\approx}\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})\cdot d\vec{r}\overset{(1.8)}{=}(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\varphi(\vec{r}) \qquad (1.14)$$

Dementsprechend erhalten wir bei einem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ für kleine $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{A}(\vec{r}+\vec{a}+t\vec{b})-\vec{A}(\vec{r}+t\vec{b})\approx(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A}(\vec{r}+t\vec{b}) \qquad (1.15)$$
$$\vec{A}(\vec{r}+s\vec{a}+\vec{b})-\vec{A}(\vec{r}+s\vec{a})\approx(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A}(\vec{r}+s\vec{a}) \qquad (1.16)$$

Das hat für die Zirkulation (1.13) zur Folge

$$\oint_{\Delta C}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_0^1 dt\,(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\left[\vec{b}\cdot\vec{A}(\vec{r}+t\vec{b})\right]-\int_0^1 ds\,(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\left[\vec{a}\cdot\vec{A}(\vec{r}+s\vec{a})\right]$$
$$\approx(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\left[\vec{b}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right]-(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\left[\vec{a}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right] \qquad (1.17)$$

Als Nebenrechnung betrachten wir die folgenden Vektoridentitäten. Zunächst wenden wir die zyklische Vertauschbarkeit beim Spatprodukt an

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) \qquad (1.18)$$

und erhalten

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})\right]\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot\left\{\vec{b}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})\right]\right\} \qquad (1.19)$$

Anschließend wenden wir die "BAC − CAB" − Regel für das doppelte Vektorprodukt

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\,(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) \qquad (1.20)$$

auf (1.19) an:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})\right]=\vec{a}\cdot\left\{\vec{\nabla}\left[\vec{b}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right]-(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A}(\vec{r})\right\}$$
$$=(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\left[\vec{b}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right]-(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\left[\vec{a}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right] \qquad (1.21)$$

Aus (1.17) und (1.21) folgt dann mit $\vec{\Delta F} = \vec{a} \times \vec{b}$ für die Zirkulation:

$$\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \approx (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] = \vec{\Delta F} \cdot [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] \quad (1.22)$$

Aufgrund der Zerlegung $\vec{\Delta F} = \vec{n} \cdot \Delta F$ führt der Vergleich von (1.3) und (1.22) auf

$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{n} \cdot [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] \quad (1.23)$$

Wegen der Beliebigkeit des Normalenvektors $\vec{n}$ lässt sich auch die Rotation des Vektorfeldes durch den Nabla-Operator ausdrücken:

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (1.24)$$

Einsetzen von (1.7) in (1.24) ergibt die Komponenten

$$\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(\vec{r}) & A_y(\vec{r}) & A_z(\vec{r}) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

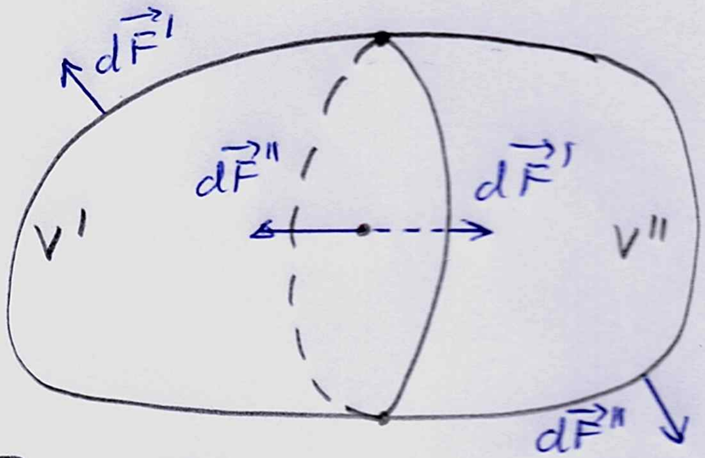
1.3 Integralsätze:

Aus den Definitionen der Divergenz in (1.2) und der Rotation in (1.3) lassen sich die Integralsätze von Gauß und Stokes ableiten.

1.3.1 Integralsatz von Gauß:

Gegeben sei ein Volumen V mit einer geschlossenen Fläche F. Hierbei sollen die Flächenelemente $d\vec{F}$ nach außen zeigen. Außerdem sei ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gegeben, bei dem eventuelle Singularitäten außerhalb von V liegen sollen. Man berechne den Fluss Φ von $A(\vec{r})$ durch F:

$$\Phi = \oint_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (1.26)$$



Man zerlegt V durch eine Trennfläche in zwei Teilvolumina V' und V''. Es gilt dann:

$$\Phi = \oint_{F'} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{F}\,' + \oint_{F''} \vec{A}(\vec{r}\,'') \cdot d\vec{F}\,'' \qquad (1.27)$$

da für jedes Flächenelement der gemeinsamen Innenfläche gilt

$$\vec{A}(\vec{r}\,') = \vec{A}(\vec{r}\,''), \quad d\vec{F}\,' = -d\vec{F}\,'' \qquad (1.28)$$

Demnach kompensieren sich die zusätzlichen Beiträge der Innenflächen gerade gegenseitig.

Durch weitere Schnittflächen parzelliere man das Volumen V in Volumenelemente ΔV_i mit $i = 1, \dots, n$. Alle Beiträge zum Fluß von inneren Oberflächen heben sich dann analog zu (1.28) gegenseitig auf:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \oint_{F_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \qquad (1.29)$$

Für eine hinreichend kleine Parzellierung folgt dann mit $\vec{r}_i \in V_i$ aus (1.2):

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta V_i \xrightarrow{n \to \infty} \int_V \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV \qquad (1.30)$$

Aus (1.26) und (1.30) erhalten wir insgesamt den Satz von Gauß:

$$\oint_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \int_V \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) \, dV \qquad (1.31)$$

Als Anwendung betrachten wir das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} \, f(\vec{r})$, so dass (1.31) übergeht in

$$\vec{a} \cdot \oint_F f(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \vec{a} \cdot \int_V \operatorname{grad} f(\vec{r}) \, dV \qquad (1.32)$$

Da (1.32) für jeden beliebigen Vektor $\vec{a}$ gilt, folgt die Identität

$$\oint_F f(\vec{r}) \, d\vec{F} = \int_V \operatorname{grad} f(\vec{r}) \, dV \qquad (1.33)$$

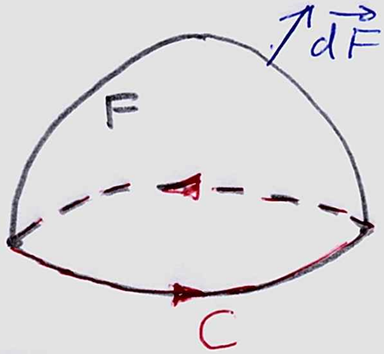
Spezialisiert man (1.33) für die Funktion $f(\vec{r}) = 1$, so folgt hieraus

$$\oint_F d\vec{F} = \vec{0} \qquad (1.34)$$

Das bedeutet, dass bei einer geschlossenen Oberfläche F die Summe aller Oberflächenvektoren $d\vec{F}$ den Nullvektor ergibt.

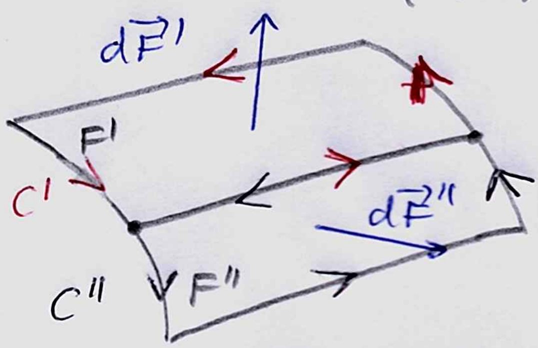
1.3.2 Integralsatz von Stokes:

Gegeben sei eine orientierte Fläche F im Raum mit einem geschlossenen orientierten Rand C. Dabei werden die Orientierungen von F und C nach der Rechtsschraubenregel gewählt.



Außerdem sei ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gegeben, dessen Singularitäten außerhalb von F liegen sollen. Man berechne die Zirkulation von $\vec{A}(\vec{r})$ entlang des Randes C:

$$Z = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (1.35)$$



Man zerlege F durch eine Trennlinie in zwei Teilflächen F' und F''. Es folgt dann für die Zirkulation

$$Z = \oint_{C'} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \oint_{C''} \vec{A}(\vec{r}'') \cdot d\vec{r}'' \qquad (1.36)$$

denn für jedes Linienelement der gemeinsamen Trennlinie gilt

$$\vec{A}(\vec{r}') = \vec{A}(\vec{r}''), \quad d\vec{r}' = -d\vec{r}'' \qquad (1.37)$$

so dass sich die beiden zusätzlichen Beiträge der Trennlinie genau gegenseitig kompensieren.

Durch weitere Linien parzelliere man F in Flächenelemente ΔF_i mit $i = 1, \dots, n$. In der Summe

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (1.38)$$

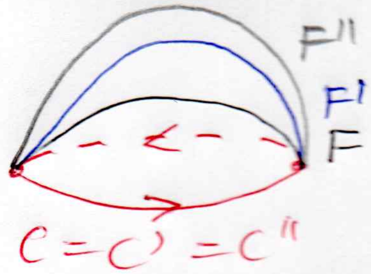
heben sich dann alle Beiträge von inneren Rändern analog zu (1.37) gegenseitig weg. Bei hinreichend kleiner Parzellierung folgt mit $\vec{r}_i \in \Delta F_i$ aus (1.3)

$$Z \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{F}_i \cdot \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}_i) \xrightarrow{n \to \infty} \int_F \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \qquad (1.39)$$

Aus (1.35) und (1.39) lesen wir dann den Satz von Stokes ab:

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \qquad (1.40)$$

Man beachte dabei, dass es mehrere Flächen $F, F', F'', \ldots$ mit ein- und demselben Rand $C = C' = C'' = \ldots$ gibt.



Auch hier betrachten wir als Anwendung das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a}\, f(\vec{r})$, sodass (1.40) übergeht in

$$\vec{a} \cdot \oint_C f(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_F \left[\operatorname{grad} f(\vec{r}) \times \vec{a}\right] \cdot d\vec{F} = \vec{a} \cdot \int_F d\vec{F} \times \operatorname{grad} f(\vec{r}) \qquad (1.41)$$

Da (1.41) für jeden konstanten Vektor $\vec{a}$ gilt, folgt

$$\oint_C f(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_F d\vec{F} \times \operatorname{grad} f(\vec{r}) \qquad (1.42)$$

Spezialisiert man (1.42) für die Funktion $f(\vec{r}) = 1$, so folgt die Aussage

$$\oint_C d\vec{r} = \vec{0} \qquad (1.43)$$

Das bedeutet, dass bei einer geschlossenen Kurve die Summe aller Tangentialvektoren $d\vec{r}$ den Nullvektor ergibt.

1.3.3 Weitere Anwendung:

Zum Schluss betrachten wir noch eine weitere nützliche Anwendung des Satzes von Gauß. Hierzu spezialisieren wir auf das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}$, für das gilt

$$\operatorname{div}\left[\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}\right] = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a}(\vec{r}) \qquad (1.44)$$

Damit erhalten wir für den Satz von Gauß (1.31):

$$\int_V \operatorname{div}\left[\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}\right] = \vec{b} \cdot \int_V \operatorname{rot} \vec{a}(\vec{r})\, dV$$
$$= \oint_F d\vec{F} \cdot \left[\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}\right] = \vec{b} \cdot \oint_F d\vec{F} \times \vec{a}(\vec{r}) \qquad (1.45)$$

Da (1.45) für jeden konstanten Vektor $\vec{b}$ gilt, folgt

$$\int_V \operatorname{rot} \vec{a}(\vec{r})\, dV = \int_F d\vec{F} \times \vec{a}(\vec{r}) \qquad (1.46)$$

Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir die Spezialfälle (1.33) und (1.46) des Satzes von Gauß benötigen.