

# 11 Spezielle Relativitätstheorie

In diesem Kapitel entwickeln wir Schritt für Schritt die Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie. Wir fassen zunächst die Vorstellungen von Raum und Zeit zusammen, die ursprünglich von Aristoteles und Galilei geprägt worden sind. Dann diskutieren wir, wie diese Vorstellungen von Raum und Zeit durch die Einsteinsche Relativitätstheorie verändert worden sind. Dabei werden wir ausgehend von den Grundprinzipien der Speziellen Relativitätstheorie einige grundlegende physikalische Konsequenzen wie die Zeitdilatation oder die Längenkontraktion ableiten. Anschließend entwickeln wir das Vektor- und Tensor-Kalkül der Speziellen Relativitätstheorie, mit dem sich physikalische Gesetzmäßigkeiten kompakt formulieren lassen. Im nächsten Kapitel wenden wir dieses Vektor- und Tensorkalkül dann an, um die Newtonsche Mechanik zur Einsteinschen Mechanik zu erweitern und um die Maxwell'sche Elektrodynamik relativistisch kovariant zu formulieren.

## 11.1 Historische Vorstellungen von Raum und Zeit

Die physikalischen Vorgänge spielen sich im Raum und Zeit ab. Dabei wird der Raum dadurch charakterisiert, dass man mit Hilfe von Koordinaten die Lage von Ereignissen beschreiben kann. Beziehungen zwischen den Lagen erlauben weitestgehend Aussagen über die Geometrie. Demgegenüber wird die Zeit dadurch charakterisiert, dass man mit ihrer Hilfe die Abfolge von Ereignissen protokollieren kann. Dadurch hat man z.B. Zugang zur Bewegung von Punktteilchen, d.h. der Kinematik und der Dynamik. Ein Ereignis lässt sich damit durch die Angabe von Zeit und Raum eindeutig beschreiben:

$$(t, \vec{r}) = (t, x, y, z)$$

(11.1)

Um für diese einzelnen Komponenten aber dieselben physikalischen Dimensionen zu erhalten, verwendet man statt (11.1) besser

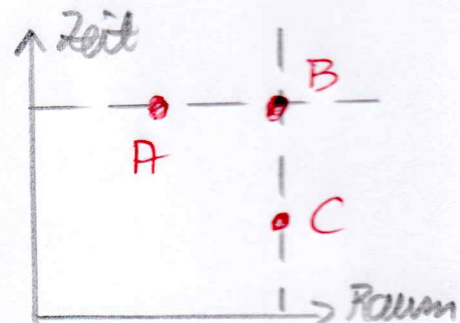
$$(ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$$

(11.2)

Die Geschichte der Physik hat gezeigt, dass es eine enge Wechselbeziehung zwischen der Theorie vom Raum und Zeit und den dynamischen Naturgesetzen gibt. Einerseits sind die geometrischen Strukturen notwendig, um dynamische Naturgesetze überhaupt formulieren zu können. Dabei können Symmetrieforderungen an Raum und Zeit wie z. B. Homogenität oder Isotropie die dynamischen Naturgesetze einschränken. Andererseits haben die Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie (1905) und die der Allgemeinen Relativitätstheorie (1915) durch Einstein gezeigt, dass sich dynamische Naturgesetze auf die geometrische Struktur von Raum und Zeit auswirken können.

### 11.1.1 Raum und Zeit nach Aristoteles:

Nach Aristoteles werden Raum und Zeit als absolute Größen aufgefasst. Bei den drei Ereignissen A, B, C werden die Ereignisse A und B als absolut gleichzeitig und die Ereignisse B und C als absolut gleichzeitig aufgefasst. Der Begriff "absolut" soll dabei zum Ausdruck bringen, dass es sich hierbei um Beobachtungen handelt, die unumstößlich sind und von allen Beobachtern so gesehen werden. Diese Vorstellungen von Aristoteles werden durch Kanturteilt. Nach Kant sind Raum und Zeit Grundkategorien unseres Denkens bzw. Kategorien der Anschauung, die nicht weiter hinterfragt werden können.



Die Zeit  $T$  wird als Menge  $\mathbb{R}$  angesehen, so dass für jeden Zeitpunkt  $t$  gilt:  $t \in \mathbb{R}$ . Da die Zeit als homogen angesehen wird, besitzen zwei zeitliche Ereignisse  $t, t' \in \mathbb{R}$  den euklidischen Abstand  $|t - t'|$ . Entsprechend wird der Raum  $X$  als die Menge  $\mathbb{R}^3$  angesehen, so dass für jeden Raumpunkt  $\vec{r}$  gilt:  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ . Da der Raum als homogen und isotrop angesehen wird, besitzen zwei Raumpunkte  $\vec{r}, \vec{r}' \in \mathbb{R}^3$  den euklidischen Abstand  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2}$ .

### 11.1.2 Raum und Zeit nach Galilei:

Die Vorstellungen von Aristoteles über Raum und Zeit werden von Galilei folgendermaßen kritisiert. Er stellte fest,

dass man kein absolut ruhendes Bezugssystem definieren kann. Außerdem führte er den Begriff des Inertialsystems ein. Es handelt sich dabei um ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreies Körper geradlinig und gleichförmig bewegen kann. Liegt ein Inertialsystem vor, so ist jedes gleichförmig dazu bewegte Bezugssystem auch wieder ein Inertialsystem. Diese Feststellung wird durch die Alltagserfahrung untermauert: Es gibt keine Möglichkeit, einen ruhenden von einem gleichförmig fahrenden Zug zu unterscheiden, wenn man über keinerlei Sinnesinformationen verfügt wie z. B. Fahrgewände oder einen Blick nach außen. Deshalb forderte Galilei, dass die mechanischen Naturgesetze in allen Inertialsystemen gelten müssen. Wenn man also von einem Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem wechselt, d. h. wenn man eine Galilei-Transformation vornimmt, müssen die mechanischen Naturgesetze forminvariant sein. Man spricht von der Kovarianz der mechanischen Naturgesetze.

Wir betrachten zwei Bezugssysteme. Während das erste ruht, bewegt sich das zweite gegenüber dem ersten mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung. Die Raum-Zeit-Koordinaten in beiden Bezugssystemen werden durch eine Galilei-Transformation ineinander überführt:

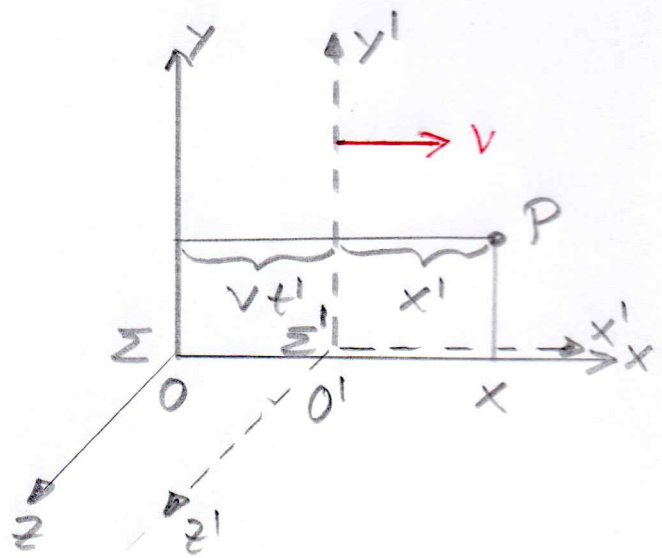
$$t = t'$$

$$x = x' + vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

(11.3)

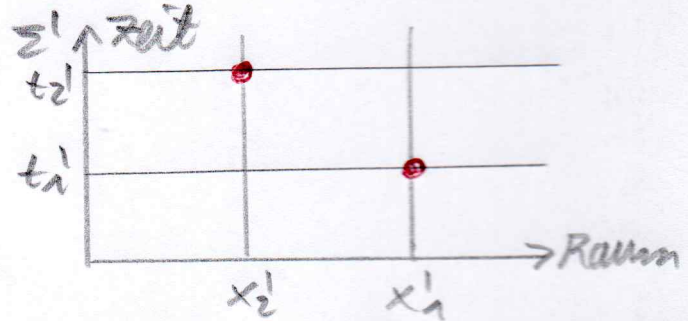
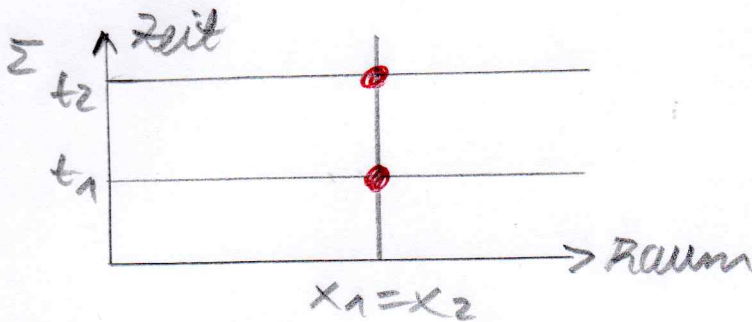


Als Beispiel betrachten wir als ruhendes Bezugssystem  $\Sigma$  den Bahnsteig und als gleichförmig bewegtes Bezugssystem  $\Sigma'$  einen fahrenden Zug. Es sollen zum zwei Ereignisse an selben Ort  $x_1 = x_2$  in  $\Sigma$  zu verschiedenen Zeiten

$t_2 > t_1$  stattfinden. Dann folgt aus (11.3) für  $\Sigma'$ :

$$x'_2 = x'_1 - v(t_2 - t_1) < x'_1 \quad (11.4)$$

Das bedeutet, dass es nach Galilei zwar auch weiterhin eine absolute Gleichzeitigkeit gibt, dass aber die Gleichzeitigkeit nun relativ, d.h. abhängig vom Bezugssystem, ist:



Wir betrachten nun die Galilei-Transformationen (11.3) und

$$\begin{aligned} t' &= t'' \\ x' &= x'' + v' t'' \\ y' &= y'' \\ z' &= z'' \end{aligned} \quad (11.5)$$

Dann ist die Hintereinanderausführung dieser beiden Galilei-Transformationen wieder eine Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} t &= t'' \\ x &= x'' + v'' t'' \\ y &= y'' \\ z &= z'' \end{aligned} \quad (11.6)$$

wobei sich die Geschwindigkeiten additiv transformieren:

$$v'' = v + v' \quad (11.7)$$

Dennnach besitzt die Gesamtheit aller Galilei-Transformationen die mathematische Struktur einer Gruppe. Dabei besagt (11.7) zunächst, dass die Menge der Galilei-Transformationen bezüglich der Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen abgeschlossen ist. Ferner lernen wir aus (11.7) ab, dass sich die Assoziativität bei Hintereinanderausführung von drei Galilei-Transformationen aus der Assoziativität der Addition der Geschwindigkeiten ergibt. Das Einselement ist eine Galilei-Transformation mit der Geschwindigkeit  $v=0$ . In der Tat folgt nach (11.7) aus  $v=0$  unmittelbar  $v''=v'$ . Das zu (11.3) inverse Element ist

eine Galilei-Transformation mit der Erdbeweglichkeit  $v' = -v$ . In der Tat folgt aus (11.7) aus  $v' = -v$  unmittelbar  $v'' = 0$ , d. h. das Einselement.

Diese Galileischen Vorstellungen von Raum und Zeit sind durch die einsteinsche spezielle und allgemeine Relativitätstheorie grundlegend verändert worden. Dabei werden Änderungen von den Galileischen Vorstellungen sichtbar bei großen Erdbeweglichkeiten (spezielle Relativitätstheorie) oder bei starken Gravitationsfeldern (allgemeine Relativitätstheorie).

11.2 Einsteinsche Postulate:

Die spezielle Relativitätstheorie beruht auf den beiden folgenden Postulaten von Einstein:

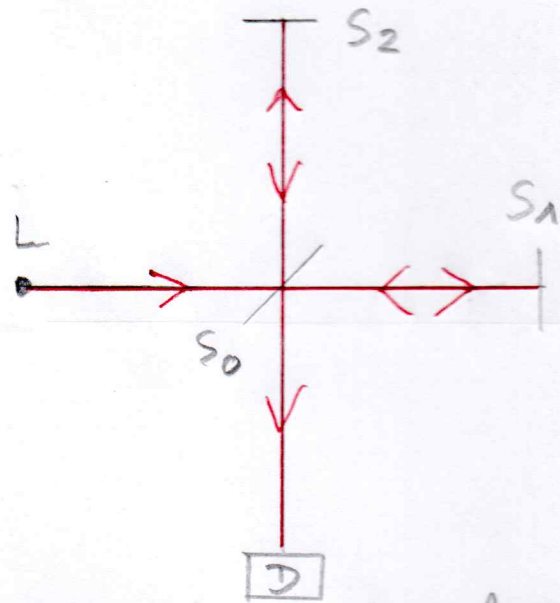
(E1) Relativitätsprinzip:  
Es gibt Inertialsysteme, d. h. Bezugssysteme, in denen sich kräftefreie Körper gleichförmig geradlinig bewegen. In allen Inertialsystemen haben die physikalischen Naturgesetze die gleiche Form.

Wir bemerken, dass das einsteinsche Relativitätsprinzip die Galileische Kovarianzforderung, die nur für mechanische Naturgesetze aufgestellt wurde, auf alle physikalischen Naturgesetze verallgemeinert. Damit ist das Relativitätsprinzip insbesondere auch auf die Elektrodynamik zu übertragen. Es zeigt sich nun, dass die Maxwell-Gleichungen aber nicht unter Galilei-Transformationen (11.3) forminvariant sind. Damit stellt sich die Frage, wie man diesen Widerspruch auflöst. Wir werden später sehen, dass deshalb die Transformationen zwischen Inertialsystemen von den Galilei-Transformationen (11.3) auf die Lorentz-Transformationen zu erweitern sind, die die Maxwell-Gleichungen forminvariant lassen.

(E2) Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:  
In allen Inertialsystemen hat die (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit den gleichen Wert  $c$ .

Wir bemerken zunächst, dass dieses Zwiesinn von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit der unmittelbaren Anschauung widerspricht. Aus (11.7) folgt nämlich mit  $v=c$ , dass  $v'' = v' + c$  ist. Demnach erlaubte die Galilei-Transformationen beliebig große Lichtgeschwindigkeiten.

Das Zwiesinn von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist aber schon von Michelson und Morley 1881 (Rotterdam) und 1907 (Cleveland) experimentell getestet worden. Hierzu wurde ein Michelson-Morley-Interferometer mit nehmstehendem symmetrischen Aufbau verwendet. Das von der Lichtquelle  $L$  ausgehende Licht wird an einer unter  $45^\circ$  geneigten halbdurchlässigen Glasplatte  $S_0$  zum Hälfte reflektiert und zum Hälfte durchgelassen. Der reflektierte und der durchgelassene Teil gelangen nach Reflektionen an den Spiegel  $S_1$  und  $S_2$  aber  $S_0$  zum Detektor  $D$ , wo sie interferieren.

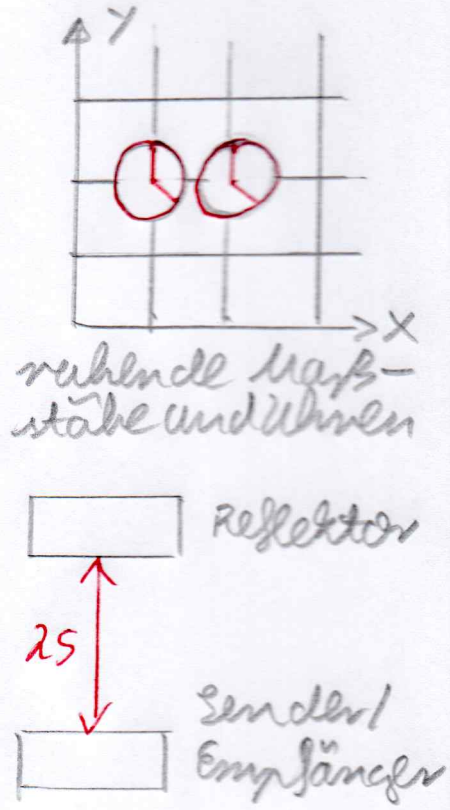


Man beobachtet nun die Interferenzmuster, während sich die Erde um die Sonne bewegt. Dabei ist die Erdbeschwindigkeit  $\vec{v}_E$  mit  $|\vec{v}_E| = 30 \text{ km/s}$  beim Experiment ① bzw. ② parallel zum Strahlengang  $S_0 S_2$  bzw.  $S_0 S_1$ . Man würde deshalb nach Galilei erwarten, dass sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Licht in den jeweiligen Strahlengängen im Experiment ① und ② voneinander unterscheiden. Dies müsste beim Übergang vom Experiment ① zum Experiment ② zu einer Veränderung der Interferenzmuster führen. Tatsächlich wird aber so eine Veränderung der Interferenzmuster nicht beobachtet. Hieraus schließt man, dass die Lichtgeschwindigkeit immer  $c$  ist.

Auch die heutigen verfeinerten experimentellen Techniken liefern immer den gleichen Wert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle. Damit ist das Zwiesinn der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ein wesentliches Elementarzwiesinn der Physik.

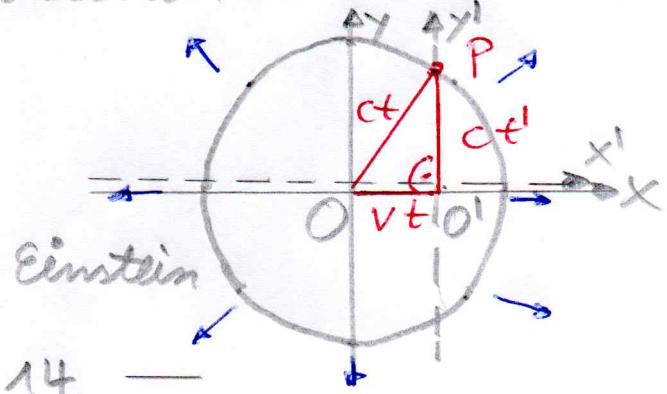
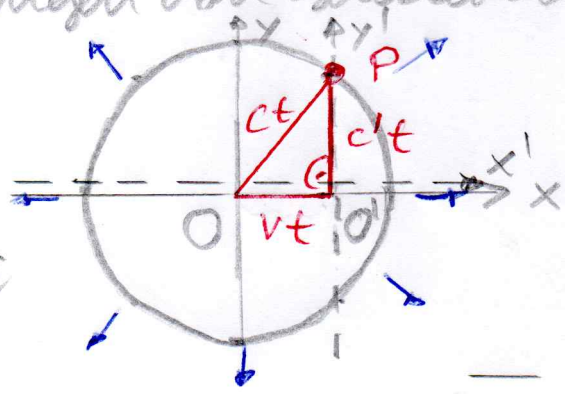
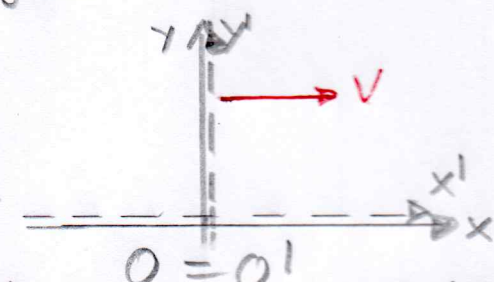
# 11.3 Längen- und Zeitmessung:

Bei der Messung der Bewegung eines Körpers ist eine kombinierte Längen- und Zeitmessung erforderlich. Für die Längenmessung verwendet man ein Messwerk ruhender gleichzeitiger Stäbe. Für die Zeitmessung werden Uhren an jedem Raumpunkt verwendet, die unterschiedlich synchronisiert sind. Hierzu werden Lichtsignale vom Ursprung aus an alle Uhren gesandt. Dabei ist das Ereignis der Uhren beliebig. Oft benutzt man für Überlagerungen in der speziellen Relativitätstheorie eine Lichtuhr. Dort misst man die Zeit  $t$  durch die Strecke  $2s$ , die ein Lichtstrahl vom Sender über den Reflektor zum Empfänger benötigt:  $t = 2s/c$ .



## 11.3.1 Zeitdilatation (Zeitdehnung):

Wir untersuchen nun genauer, wie die gleichen Vorgänge von verschiedenen Bezugssystemen aus beurteilt werden, die sich relativ zueinander gleichförmig bewegen. Hierzu betrachten wir ein ruhendes Inertialsystem  $\Sigma$  mit dem Beobachter  $O$  im Ursprung und ein gleichförmig dazu bewegtes Inertialsystem  $\Sigma'$  mit dem Beobachter  $O'$  im Ursprung. Zum Zeitpunkt  $t = t' = 0$  wird ein Lichtsignal bei  $O = O'$  gesendet. Es breitet sich sowohl in  $\Sigma$  als auch in  $\Sigma'$  kugelförmig radial aus. Die physikalische Interpretation dieses Gedankenexperiments hängt nun aber davon ab, ob man den Überlagerungen von Galilei oder denen von Einstein folgt:



In beiden Fällen ist im  $\Sigma$  der Punkt P die Strecke  $ct$  vom Ursprung  $O$  entfernt und der Ursprung  $O'$  ist vom Ursprung  $O$  die Strecke  $vt$  entfernt. Galilei und Einstein unterscheiden sich nur aber grundlegend darin, wie die dritte Seite im rechtwinkligen Dreieck zu interpretieren ist:

1) Nach Galilei ist die Zeit absolut. Deshalb ist die dritte Seite durch  $c't$  gegeben und die Anwendung des Satzes von Pythagoras führt auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c' \neq c$  in  $\Sigma'$ :

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (c't)^2 \Rightarrow c' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c \quad (11.8)$$

2) Nach Einstein gilt aber das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Daher muss sich das Licht in  $\Sigma'$  von  $O'$  nach P auch mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausbreiten. Deshalb wird die dritte Seite durch  $ct'$  angesetzt, wobei  $t'$  die in  $\Sigma'$  verstrichene Zeit darstellt. Mit dem Satz von Pythagoras lässt sich diese Zeit  $t' \neq t$  in  $\Sigma'$  bestimmen:

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (ct')^2 \Rightarrow t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \quad (11.9)$$

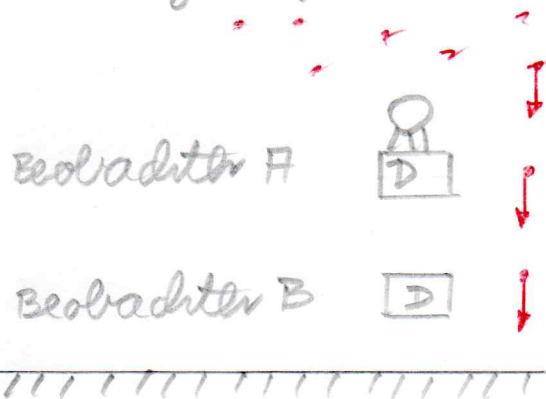
Wir lesen also  $t' < t$  ab, d.h. eine relativ zu einem Bezugssystem bewegte Uhr geht langsamer im Vergleich zu einer ruhenden Uhr. Man bezeichnet diesen Effekt als Zeitdilatation (= Zeitdehnung). Er gilt nicht nur für Uhren sondern für alle Prozesse.

Es ist zu beachten, dass auch umgekehrt der Beobachter O sagen kann, dass seine Uhren ruhen und sich die Uhren im Bezugssystem  $\Sigma$  bewegen. Dann würde O' messen, dass die Uhren in  $\Sigma$  langsamer gehen als seine Uhren.

### 11.3.2 Myonen-Experiment:

Die Zeitdilatation wurde 1941 durch ein Myonen-Experiment von Rossi und Hall quantitativ bestätigt. In der Erdatmosphäre erzeugen kosmische Strahlen Myonen, die sich dann mit nahezu Lichtgeschwindigkeit zur

Erzeugung von Myonen





Erde hin bewegen. Ein Detektor A in Höhe von 1910 m zählte 563 Myonen pro Stunde, die sich mit etwa 99,52% der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bewegten. Ein anderer Detektor B in Höhe von 3 m zählte 408 Myonen pro Stunde. Wir wollen nun dieses Messergebnis auswerten. Hierzu benötigen wir das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 e^{-t/t_0} \quad (11.10)$$

Hierbei ist  $N_0$  die Zahl der Myonen zur Zeit  $t=0$ ,  $N(t)$  die Zahl der zur Zeit  $t$  noch nicht zerfallenen Myonen und  $t_0 = 2,2 \mu\text{s}$  die mittlere Lebensdauer ruhender Myonen. Zunächst gehen wir von der Laborszeit aus und berechnen die Flugzeit der Myonen zwischen Detektor A und B:

$$t = \frac{1910 \text{ m} - 3 \text{ m}}{0,9952 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6,4 \mu\text{s} \quad (11.11)$$

Demnach würde man beim Detektor B eigentlich nur noch 31 Myonen pro Stunde erwarten:

$$N(t=6,4 \mu\text{s}) = 563 \cdot e^{-6,4/2,2} \approx 31 \quad (11.12)$$

Stattdessen wurden aber 408 Myonen pro Stunde gemessen. Hieraus kann man die Zeit der bewegten Myonen berechnen:

$$t' = 2,2 \mu\text{s} \cdot \ln \frac{563}{408} = 0,7 \mu\text{s} \quad (11.13)$$

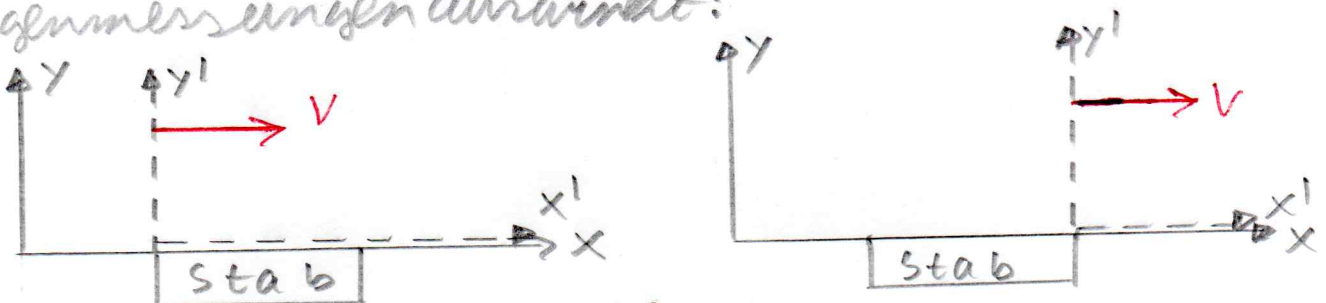
Demnach beträgt die Zeitdilatation  $t'/t = 0,7/6,4 \approx 0,11$ . Mit Hilfe von (11.9) lässt sich hieraus die Geschwindigkeit der Myonen berechnen:

$$v = \sqrt{1 - (0,11)^2} c \approx 0,994 \cdot c \quad (11.14)$$

Im Rahmen der experimentellen und statistischen Fehler stimmt dies mit der gemessenen Geschwindigkeit von  $0,9952 \cdot c$  gut überein.

### 11.3.3 Längenkontraktion:

Wir untersuchen nun, wie sich die Zeitdilatation auf Längenmessungen auswirkt:



Im ruhenden Inertialsystem  $\Sigma$  misst man die Ruhelänge

$$x = v t \quad (11.15)$$

während im bewegten Inertialsystem  $\Sigma'$  die Länge des mit  $v$  bewegten Stabes zu

$$x' = v t' \quad (11.16)$$

bestimmt wird. Das bedeutet, dass ein mit der Geschwindigkeit  $v$  in Längsrichtung bewegter Stab gegenüber seiner Ruhelänge verkürzt um den Faktor

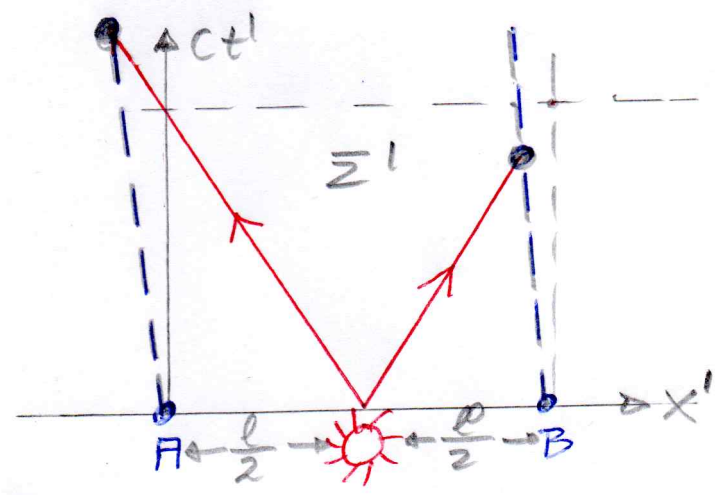
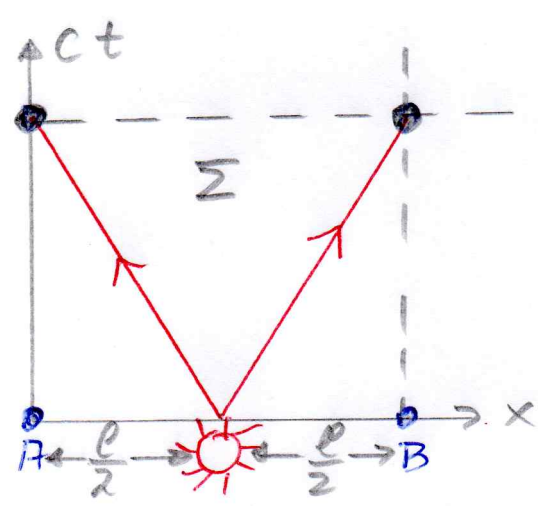
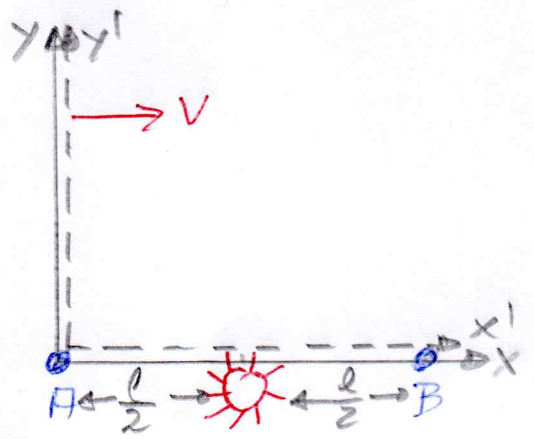
$$\frac{x'}{x} \stackrel{(11.15), (11.16)}{=} \frac{t}{t'} \stackrel{(11.9)}{=} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.17)$$

gemessen wird. Dieses Phänomen bezeichnet man als Längenkontraktion. Im Falle der umgekehrten Situation, dass ein ruhender Stab in  $\Sigma'$  vorliegt, würde in  $\Sigma$  eine verkürzte Länge gemessen.

### 11.3.4 Gleichzeitigkeit ist relativ:

In einem Bezugssystem kann man einfach feststellen, ob zwei Ereignisse gleichzeitig vorliegen. Beim jeweiligen Ereignis sieht man auf die dort angebrachte Uhr. Zeigen die beiden Uhren das Gleiche an, so sind die Ereignisse gleichzeitig, andernfalls nicht.

Wir untersuchen nun die Gleichzeitigkeit von Ereignissen. Hierzu betrachten wir Lichtblitze, die durch eine in  $\Sigma$  ruhende Lichtquelle ausgesandt werden und fragen uns, ob sie an den Orten A und B, die den Abstand  $l/2$  von der Lichtquelle haben, gleichzeitig ankommen:



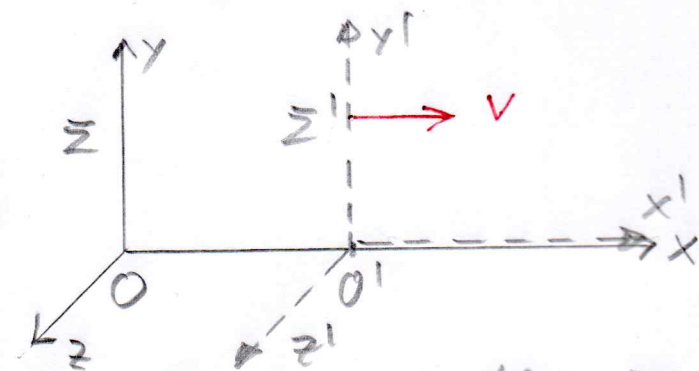
In  $\Sigma$  ruhen A und B und die von der Lichtquelle ausgehenden Lichtblitze breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus, so dass sie gleichzeitig ankommen. In  $\Sigma'$  dagegen bewegen sich A, B mit der Geschwindigkeit  $-v$ . Dennoch sendet die Lichtquelle Lichtblitze aus, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen. So mit Erscheinen die Lichtblitze bei B früher und bei A später. Die Gleichzeitigkeit von Ereignissen gilt also nicht mehr absolut, sondern hängt vom Bezugssystem ab. Wir bemerken, dass diese Tatsache die Quelle für viele Paradoxien der speziellen Relativitätstheorie ist.

#### 11.4 Lorentz-Transformationen:

In der speziell relativistischen Kinematik haben wir immer zwei Beobachter, die jeder für sich in ihrem Inertialsystem den Ort und die Zeit von Ereignissen messen. Kennt man Ort und Zeit in einem Inertialsystem, so möchte man Ort und Zeit auch in einem anderen Inertialsystem kennen. Diese Umrechnung leistet die Lorentz-Transformation.

##### 11.4.1 Herleitung der Lorentz-Transformation:

Als Standardkonfiguration verwenden wir die Synchronisation  $t = t' = 0$  bei  $0 = 0'$ . Außerdem sei  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  die Geschwindigkeit, mit der sich  $\Sigma'$  gegenüber  $\Sigma$  bewegt. Dann gilt für den Ursprung  $0'$  von  $\Sigma'$  vom Bezugssystem  $\Sigma$  aus gesehen:



$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x'=0} = v \quad (11.18)$$

Umgekehrt wird dann der Ursprung 0 von  $\Sigma$  vom Bezugssystem  $\Sigma'$  aus gesehen beobachtet durch

$$\left. \frac{dx'}{dt'} \right|_{x=0} = -v \quad (11.19)$$

Wir betrachten zunächst die Umrechnung der Koordinaten und überlegen uns, wie hierfür die Galilei-Trans-

formation (11.3) abzuändern ist. Ein in  $\Sigma'$  ruhender Stab von  $O'$  nach  $x'$  bewegt sich von  $\Sigma$  aus gesehen mit der Geschwindigkeit  $v$  und ist daher mit einer Längenkontraktion mit dem Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  versehen. Diese in  $\Sigma$  beobachtete Längenkontraktion zusammen genommen mit (11.18) führt auf

$$x = vt + x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.20)$$

$$y = y' \quad (11.21)$$

$$z = z' \quad (11.22)$$

Nun wollen wir auch noch die Umkehrumkehrung der Zeiten erhalten. Hierzu stellen wir die umgekehrte Überlegung an. Von  $\Sigma'$  aus gesehen bewegt sich der Stab von  $O$  nach  $x$  mit der Geschwindigkeit  $-v$ , was ebenfalls zu einer Längenkontraktion mit dem Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  führt. Diese in  $\Sigma'$  beobachtete Längenkontraktion ergibt dann zusammen mit (11.19):

$$x' = -vt' + x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.23)$$

Löst man (11.23) nach  $x$  auf

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.24)$$

und setzt dies in (11.20) ein, so folgt

$$t = \frac{1}{v} \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x'}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.25)$$

Insgesamt erhalten wir damit für die Lorentz-Transformation von  $\Sigma'$  nach  $\Sigma$  aus (11.21), (11.22), (11.24) und (11.25):

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (11.26)$$

Es handelt sich demnach um eine lineare Transformation der Raum-Zeit-Koordinaten.

#### 11.4.2 Gruppen Eigenschaft:

Wir untersuchen nun, was sich durch Hintereinanderausführung zweier Lorentz-Transformationen

erzählt. Daraus führen wir nach (11.26) noch eine Lorentz-Transformation zu  $\bar{z}'$  und  $\bar{z}''$  durch

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} & \frac{v'/c}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v'/c}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (11.27)$$

und erhalten zunächst

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + vv'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-v'^2/c^2}} & \frac{(v+v')/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-v'^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{(v+v')/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-v'^2/c^2}} & \frac{1 + vv'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-v'^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (11.28)$$

Damit es sich bei (11.28) wieder um eine Lorentz-Transformation der Geschwindigkeit  $v''$  handelt

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v''^2/c^2}} & \frac{v''/c}{\sqrt{1-v''^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v''/c}{\sqrt{1-v''^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v''^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (11.29)$$

müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$1. \text{ Bedingung: } \frac{1 + \frac{vv'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v''^2}{c^2}}} \quad (11.30)$$

$$2. \text{ Bedingung: } \frac{\frac{v+v'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v''}{c}}{\sqrt{1-\frac{v''^2}{c^2}}} \quad (11.31)$$

Aus (11.30) folgern wir das einsteinsche Additionstheorem für Geschwindigkeiten:

$$\frac{v''^2}{c^2} = \frac{\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{v+v'}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)^2} \quad (11.32)$$

$$\Rightarrow v''(v, v') = \frac{v+v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

Dies führt dazu, dass auch (11.31) erfüllt ist. Wir entnehmen (11.32), dass sich für kleine Geschwindigkeiten

$v/c \ll 1, v'/c \ll 1$  das Galileische Additionstheorem von (11.7) ergibt. Außerdem stellen wir fest, dass auch für  $v' = c$  auch  $v'' = c$  ergibt:

$$v''(v, c) \stackrel{(11.32)}{=} c \quad (11.33)$$

Demnach beinhaltet das einsteinsche Additionstheorem für Lichtgeschwindigkeiten (11.32) das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Wir halten ferner fest, dass die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen die mathematische Struktur einer Gruppe besitzt. Dabei besagt (11.32) gerade, dass die Menge der Lorentz-Transformationen bezüglich der Hintereinanderausführung zweier Lorentz-Transformationen abgeschlossen ist. Bei der Hintereinanderausführung von zwei Lorentz-Transformationen erhalten wir aus (11.32):

$$v + \frac{v' + v''}{1 + \frac{v'v''}{c^2}} \stackrel{(11.32)}{=} \frac{v + v' + v'' + \frac{vv'v''}{c^2}}{1 + \frac{v'v''}{c^2} + \frac{vv'}{c^2} + \frac{vv''}{c^2}} \stackrel{(11.32)}{=} \frac{\frac{v+v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} + v''}{1 + \frac{v+v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \cdot \frac{v''}{c^2}} \quad (11.34)$$

so dass auch die Assoziativität gewährleistet ist. Das Einselement ist eine Lorentz-Transformation mit der Lichtgeschwindigkeit  $v = 0$ . In der Tat folgt nach (11.32) aus  $v = 0$  unmittelbar  $v''(0, v') = v'$ . Das zu (11.26) inverse Element ist eine Lorentz-Transformation mit der Lichtgeschwindigkeit  $-v$ . In der Tat folgt aus (11.32) aus  $v' = -v$  unmittelbar  $v''(v, -v) = 0$ , d. h. das Einselement der Lorentz-Transformationen.

Wir bemerken, dass für kleine Lichtgeschwindigkeiten  $v/c \ll 1$  die Lorentz-Transformation (11.26) in die Galilei-Transformation (11.3) übergeht. Zwischen beiden Transformationen besteht dabei der folgende qualitative Unterschied. Bei der Galilei-Transformation (11.3) wird die Zeitkoordinate nicht verändert, während bei der Lorentz-Transformation (11.26) die Zeit und die Raumkoordinaten miteinander vermischt werden. Raum und Zeit sind folgendermaßen zusammengefasst: "Man stand an vollen Raum für sich und Zeit".

sich sich völlig zu Schratten herabzinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren."

Die Lorentz-Transformationen enthalten die gesamte speziell relativistische Kinematik in kompakter Form. Alle bisher erwähnten physikalischen Phänomene der speziellen Relativitätstheorie lassen sich aus diesen Lorentz-Transformationen herleiten. Dies wollen wir im folgenden an ausgewählten Beispielen explizit durchführen.

### 11.4.3 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Ein Lichtsignal starte zur Zeit  $t = t' = 0$  im gemeinsamen Ursprung  $0 = 0'$  von  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ . Wir zeigen, dass sich dann die Lichtfront in beiden Inertialsystemen kugelförmig ausbreitet. Hierzu verwenden wir die Lorentz-Transformation (11.26) und erhalten zunächst

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \frac{(ct')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\frac{v^2}{c^2} x'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2} (ct')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{x'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y'^2 - z'^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (11.35)$$

wenn sich also eine Lichtfront in  $\Sigma$  mit der Lichtgeschwindigkeit kugelförmig ausbreitet

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (11.36)$$

dann folgt aus (11.35), dass sie sich auch in  $\Sigma'$  mit derselben Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet:

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (11.37)$$

### 11.4.4 Relativität der Gleichzeitigkeit:

Wir betrachten zwei Ereignisse, die gleichzeitig in  $\Sigma'$  stattfinden:  $t_1' = t_2'$ . Dann gilt für die Differenz der Zeiten  $t_1, t_2$ , an denen dieselben Ereignisse in  $\Sigma$  beobachtet werden nach (11.26):

$$t_2 - t_1 = \frac{v(x_2' - x_1')/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (11.38)$$

was für  $x_1' \neq x_2'$  von Null verschieden ist. Nur dann, wenn die Ereignisse am selben Ort  $x_1' = x_2'$  und zur selben Zeit  $t_1' = t_2'$  in  $\Sigma'$  stattfinden, dann sind die Ereignisse auch in  $\Sigma$  gleichzeitig.

### 11.4.5 Zeitdilatation:

Wir betrachten eine Uhr  $x'$  im Inertialsystem  $\Sigma'$  ruhende Uhr. Außerdem sollen zwei Ereignisse stattfinden, wenn die Uhr die beiden Zeiten  $t_1'$  und  $t_2'$  anzeigt. Dann folgt aus der Lorentz-Transformation (11.26) für  $x_1' = x_2'$

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > t_2' - t_1' \quad (11.39)$$

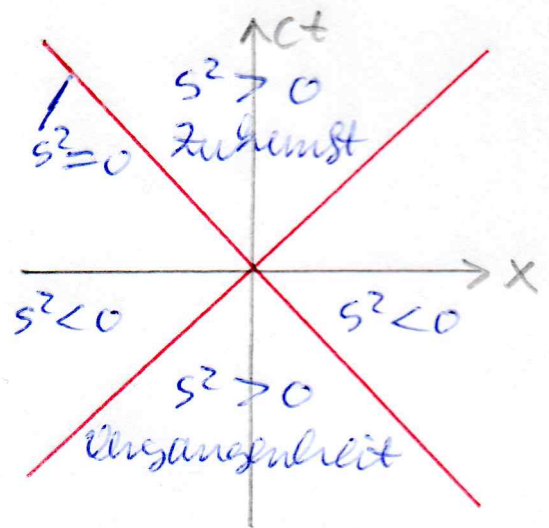
d.h. die bewegte Uhr in  $\Sigma'$  geht langsamer als die ruhende Uhr in  $\Sigma$ .

### 11.4.6 Lichtkegel:

Wir haben in Abschnitt 11.4.4 schon diskutiert, dass die Gleichzeitigkeit von Ereignissen in einem relativ ist, als sie vom Inertialsystem des Beobachters abhängt. Wir wollen deshalb hinterfragen, ob dadurch die Kausalität, dass also eine Ursache vor einer Wirkung stattfinden muss, verletzt ist. Hierzu betrachten wir zwei Ereignisse  $P = (ct, x, y, z)$  und  $O = (0, 0, 0, 0)$  in  $\Sigma$ . Dann definieren wir

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (11.40)$$

als das Quadrat des Raum-Zeit-Abstandes. Dabei haben wir schon in (11.35) gesehen, dass dieser Raum-Zeit-Abstand  $s$  in allen Inertialsystemen gleich groß ist, es gilt also  $s = s'$ . Es handelt sich demnach um eine Invariante, die vom gewählten Inertialsystem unabhängig ist.



Ist  $s^2 = 0$ , dann handelt es sich im  $ct-x$ -Diagramm um lichtartige Punkte, da sie durch Lichtsignale miteinander verbunden sind. Man spricht davon, dass  $s^2 = 0$  den Lichtkegel bzw. den Ereignishorizont definiert.

Diejenigen Ereignisse im  $ct-x$ -Diagramm mit  $s^2 > 0$  heißen zeitartig, da sie kausal miteinander verbunden sein können. Ein Ereignis mit  $s^2 > 0$  und  $t < 0$  aus der Vergangenheit kann ein Ereignis bei  $t = 0$ ,



$x=0$  beeinflussen und ein Ereignis bei  $t=0, x=0$  kann ein Ereignis  $s^2 > 0$  und  $t > 0$  in der Zukunft beeinflussen.

Reizentfernte Ereignisse im  $ct-x$ -Diagramm mit  $s^2 < 0$  heißen raumartig, da sie so weit auseinander liegen, dass sie kausal nicht miteinander verknüpft sein können. Der Grund hierfür ist, dass es keine Signale gibt, die sich mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

### 11.5 Vektor- und Tensor-Kalkül:

Das Vektor- und Tensor-Kalkül ermöglicht im  $\mathbb{R}^3$  physikalische Naturgesetze kompakt und basisunabhängig zu formulieren. Beispielsweise lassen sich die drei Newton-Gleichungen

$$\begin{aligned} m a_x &= F_x \\ m a_y &= F_y \\ m a_z &= F_z \end{aligned} \quad (11.41)$$

zu einer einzigen basisunabhängigen Newton-Gleichung zusammenfassen

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad (11.42)$$

entsprechend lässt sich auch das Superpositionsprinzip für Kräfte entweder komponentenweise

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} &= F_x \\ F_{1y} + F_{2y} &= F_y \\ F_{1z} + F_{2z} &= F_z \end{aligned} \quad (11.43)$$

oder aber basisunabhängig formulieren:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} \quad (11.44)$$

Wir führen nun auf der Grundlage des Relativitätsprinzips eine analoge Vektor- bzw. Tensor-Schreibweise ein, um physikalische Naturgesetze in der vierdimensionalen Raum-Zeit zu formulieren.

#### 11.5.1 Vierervektoren:

Wir fassen die Raum-Zeit-Koordinaten eines Ereignisses zu den Komponenten eines Vierer-Ortsvektors zusammen:

$$(x^\mu) = (ct, \vec{z}) = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) \quad (11.45)$$

Dabei werden griechische Indizes wie  $\mu$  sowohl als Laufzahl für die Menge  $\{0, 1, 2, 3\}$  als auch als Bezeichnung eines Vierervektors verwendet. Entsprechend verwenden wir lateinische Indizes wie  $i$  sowohl als Laufzahl für die Menge  $\{1, 2, 3\}$  als auch als Bezeichnung eines räumlichen Dreiervektors.

### 11.5.2 Lorentz-Transformation:

Mit Hilfe der Vierer-Ortsvektoren (11.45) läßt sich die Lorentz-Transformation (11.26) kompakt formulieren:

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu \quad (11.46)$$

hierbei bezeichnet  $\Lambda^\mu{}_\nu$  die Lorentz-Matrix, wobei  $\mu$  den Zeilen- und  $\nu$  den Spaltenindex darstellt:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.47)$$

Im folgenden werden wir immer die einsteinsche Summenkonvention verwenden, nach der bei doppelt auftretenden Indizes immer automatisch über alle Komponenten summiert wird. Wodurch reduziert sich (11.46) auf

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu \quad (11.48)$$

Damit die einsteinsche Summenkonvention zur Anwendung kommt, muss immer einer der beiden doppelt auftretenden Indizes oben stehen (kontravariant), während der andere unten steht (kovariant).

### 11.5.3 Metrik:

Das Quadrat des Raum-Zeit-Abstandes (11.40) zwischen zwei Ereignissen  $P = (ct, x, y, z)$  und  $O = (0, 0, 0, 0)$  in  $\Sigma$  läßt sich mit Hilfe der Komponenten des Vierer-Ortsvektors (11.45) notieren:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (11.49)$$

Führen wir die Minkowski-Metrik

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(11.50)

ein, so lässt sich (11.49) zusammenfassen als

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (11.51)$$

Aus früheren Rechnungen in (11.35) wissen wir, dass das Abstandsquadrat (11.51) unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Das bedeutet, dass auch in  $\Sigma'$  der Raum-Zeit-Abstand der beiden Ereignisse durch

$$s^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (11.52)$$

gegeben ist. Aus der Gleichheit von (11.51) und (11.52) folgen wir mit der Lorentz-Transformation (11.48)

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu x'^\mu x'^\nu \quad (11.53)$$

Da dies für alle vierer-Ortsvektoren  $x'^\mu$  eine Identität darstellt, schließen wir hieraus

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu} \quad (11.54)$$

oder in Matrix-Schreibweise

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (11.55)$$

Man kann (11.55) auch als die definierende Gleichung für Lorentz-Transformationen ansehen. Dabei besagt die linke Seite von (11.55), dass sich die Minkowski-Metrik wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert, da zwei 1-Matrizen auftreten. Im Unterschied dazu transformiert sich ein vierer-Ortsvektor gemäß (11.48) wie ein Tensor erster Stufe, es tritt nur eine 1-Matrix auf. Die fundamentale Einschränkung auf Lorentz-Transformationen kommt nun dadurch zu Stande, dass auf der rechten Seite von (11.55) nach einer solchen Transformation die Minkowski-Metrik (11.50) wieder auftritt.

#### 11.5.4 Einschluss: Rotationen

Wir bemerken in einem Einschluss, dass analog zu (11.55) auch andere Transformationen definiert werden. Ein elementares Beispiel stellen Rotationen dar. Sie entsprechen den  $3 \times 3$ -Rotationsmatrizen  $R$  sind nämlich durch

$$R^T I R = I \quad (11.56)$$

definiert, wobei  $I$  die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix darstellt. Da

mit entspricht (11.56) gerade der Aussage, dass die Rotationsmatrizen orthogonale Matrizen mit der Eigenschaft

$$RT = R^{-1} \quad (11.57)$$

sind. Die linke Seite von (11.56) besagt, dass sich die Euklidische Metrik wie ein Tensor zweiter Stufe mit zwei Rotationsmatrizen transformiert. Und die rechte Seite von (11.56) besagt, dass durch eine solche Rotation die Euklidische Metrik nicht verändert wird. Interessanter Weise sind auch die so definierten Rotationen Bestandteil der Lorentz-Gruppe. Da Rotationen nur die Ortsvektoren aber nicht die Zeit verändern, lassen sie sich auch als  $4 \times 4$ -Matrizen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & R \end{pmatrix} \quad (11.58)$$

mittelm Nullvektor  $\vec{0} = (0, 0, 0)$  darstellen, die dann aufgrund von (11.50) und (11.56) auch die definierende Eigenschaft (11.55) erfüllen. Demnach besteht die Lorentz-Gruppe aus den speziellen Lorentz-Transformationen der Form (11.47), die auch als Boosts bezeichnet werden, und den Rotationen (11.58).

### 11.5.5 Einschluss: Kanonische Transformationen

Ein weiteres zu (11.55) analoges Beispiel stellen kanonische Transformationen in der hamiltonschen Mechanik dar. Ausgangspunkt sind hier die hamiltonschen Bewegungsgleichungen, die für einen Freiheitsgrad durch

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \quad (11.59)$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H(q, p)}{\partial q}$$

mit der hamilton-Funktion  $H(q, p)$  gegeben sind. Führt man einen Vektor im Phasenraum durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (11.60)$$

ein, dann lassen sich die hamilton-Gleichungen (11.59) kompakt zusammenfassen zu

$$\dot{\vec{x}} = M \vec{\nabla}_{\vec{x}} H(\vec{x}) \quad (11.61)$$

hierbei tritt die sogenannte symplektische Metrik

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.62)$$

auf. Mit ihrer Hilfe lässt sich die Poisson-Klammer

Zweier Phasenraumfunktion  $F(q, P)$  und  $G(q, P)$

$$\{F, G\}_{q, P} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial P} - \frac{\partial F}{\partial P} \frac{\partial G}{\partial q} \quad (11.63)$$

definierten als

$$\{F, G\}_{\vec{x}} = (\vec{\nabla}_{\vec{x}} F)^T M \vec{\nabla}_{\vec{x}} G \quad (11.64)$$

Führt man nun eine kanonische Transformation

$$q = q(Q, P) \quad (11.65)$$

$$P = P(Q, P)$$

von den alten Phasenraumkoordinaten  $q, P$  zu den neuen Phasenraumkoordinaten  $Q, P$  durch, so müssen die Hamilton-Gleichungen (11.59) forminvariant sein, d.h. es muss gelten

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}(Q, P)}{\partial P} \quad (11.66)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}(Q, P)}{\partial Q}$$

mit der neuen Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}(Q, P) = H(q(Q, P), P(Q, P)) \quad (11.67)$$

Wir erhalten demnach für den Vektor im Phasenraum

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (11.68)$$

analog zu (11.61)

$$\dot{\vec{X}} = M \vec{\nabla}_{\vec{x}} \tilde{H}(\vec{x}) \quad (11.69)$$

mit derselben symplektischen Matrix  $M$ . In der Hamiltonschen Mechanik wird nun gefordert, dass genau dann eine kanonische Transformation vorliegt, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern forminvariant sind, d.h. es gilt

$$\{q, P\}_{Q, P} = 1 \quad (11.70)$$

Es stellt sich nun heraus, dass (11.70) folgender Aussage entspricht

$$J^T M J = M \quad (11.71)$$

wobei  $J$  die Jacobi-Matrix der kanonischen Transformation darstellt

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial P}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial P}{\partial P} \end{pmatrix} \quad (11.72)$$

In der Tat führt Einsetzen von (11.62) und (11.72) in (11.71) gerade auf (11.70). Nach (11.71) sind kanon-

nische Transformationen also gerade dadurch definiert, dass sie die symplektische Metrik, mit der der Phasenraum ausgestattet ist, nicht verändern.

### 11.5.6 Skalarprodukt:

Liegen zwei verschiedene Vierervektoren  $A^\mu$  und  $B^\nu$  vor, so lässt sich mit Hilfe der Minkowski-Metrik (11.50) ein Skalarprodukt einführen:

$$(A, B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad (11.73)$$

Jeder Vierervektor lässt sich wie der Vierer-Ortsvektor in (11.48) mit einer Lorentz-Transformation in ein anderes Inertialsystem überführen:

$$A^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha A'^\alpha, \quad B^\mu = \Lambda^\mu{}_\beta B'^\beta \quad (11.74)$$

Deshalb folgt mit Hilfe von (11.54), dass das Skalarprodukt (11.73) invariant ist:

$$(A, B) \stackrel{(11.73)}{(11.74)} g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta A'^\alpha B'^\beta \stackrel{(11.54)}{=} g_{\alpha\beta} A'^\alpha B'^\beta \stackrel{(11.73)}{(11.75)} (A', B')$$

### 11.5.7 Ko- und kontravariante Vierervektoren:

Die Form des Skalarproduktes (11.73) legt es nahe, neben einem kontravarianten Vierervektor  $A^\mu$  auch einen kovarianten Vierervektor

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (11.76)$$

einzuführen. Beispielsweise erhalten wir aus dem kontravarianten Vierer-Ortsvektor (11.45) und der Minkowski-Metrik (11.50) den kovarianten Vierer-Ortsvektor

$$(x_\mu) = (ct, -x, -y, -z) \quad (11.77)$$

Mit Hilfe des kovarianten Vierervektors (11.76) lautet das Skalarprodukt (11.73)

$$(A, B) = A_\mu B^\mu \quad (11.78)$$

Führen wir neben der kovarianten Minkowski-Metrik (11.50) auch noch die kontravariante Minkowski-Metrik

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11.79)$$

ein, so lässt sich auch umgekehrt ein kovarianter Vierervektor in einen kontravarianten Vierervektor umwandeln:

$$A^\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (11.80)$$

Beispielsweise geht (11.77) mit Hilfe von (11.79), (11.80) in (11.45) über. Man spricht davon, dass sich mit Hilfe der Minkowski-Metriken (11.50), (11.79) gemäß (11.76), (11.80) die Indizes runter- und hochheben lassen.

Wir untersuchen nun, wie sich ein kovarianter Vektor unter einer Lorentz-Transformation verändert:

$$A_\alpha \stackrel{(11.76)}{=} g_{\alpha\mu} A^\mu \stackrel{(11.74)}{=} g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \stackrel{(11.80)}{=} g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\beta} A_\beta \quad (11.81)$$

Wir erhalten demnach

$$A_\alpha = \bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta A_\beta \quad (11.82)$$

mit der Matrix

$$\bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\beta} \quad (11.83)$$

Dabei steht  $\alpha$  für den Zeilen- und  $\beta$  für den Spaltenindex, so dass (11.83) in Matrixschreibweise lautet

$$\bar{\Lambda} = g \Lambda g \quad (11.84)$$

Aus (11.47), (11.50), (11.79) folgt damit

$$(\bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta) = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_0^0 & \bar{\Lambda}_0^1 & \bar{\Lambda}_0^2 & \bar{\Lambda}_0^3 \\ \bar{\Lambda}_1^0 & \bar{\Lambda}_1^1 & \bar{\Lambda}_1^2 & \bar{\Lambda}_1^3 \\ \bar{\Lambda}_2^0 & \bar{\Lambda}_2^1 & \bar{\Lambda}_2^2 & \bar{\Lambda}_2^3 \\ \bar{\Lambda}_3^0 & \bar{\Lambda}_3^1 & \bar{\Lambda}_3^2 & \bar{\Lambda}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v/c & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.85)$$

Der Vergleich von (11.85) mit (11.47) zeigt, dass  $\bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta$  gerade die zu  $\Lambda^\mu{}_\nu$  inverse Lorentz-Transformation darstellt:

$$\bar{\Lambda}(v) = \Lambda(-v) \quad (11.86)$$

Es gilt deshalb

$$\Lambda \cdot \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \cdot \Lambda = I \quad (11.87)$$

und der  $4 \times 4$ -Einheitsmatrix  $I$ .

### 11.5.8 Tensoren:

Wir verallgemeinern nun den Tensorbegriff und führen einen Tensor  $(m, n)$ ter Stufe ein. Dabei sollen  $m$  Komponenten kontravariant und  $n$  Komponenten kovariant sein:  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}{}_{\beta_1 \dots \beta_n}$ . In Verallgemeinerung von (11.74) und (11.82) transformiert sich ein solcher Tensor  $(m, n)$ ter Stufe mit  $m$   $\Lambda$ 's und  $n$   $\bar{\Lambda}$ 's:

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}{}_{\beta_1 \dots \beta_n} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\alpha_m}{}_{\mu_m} \bar{\Lambda}_{\beta_1}{}^{\nu_1} \dots \bar{\Lambda}_{\beta_n}{}^{\nu_n} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \quad (11.88)$$

Nach dieser Definition ist der invariante Raum-Zeit Abstand (11.51), (11.52) ein Tensor (0,0)ter Stufe und (11.74) bzw. (11.82) definieren die Transformation eines kontravarianten bzw. kovarianten Vektorvektors als Tensor (1,0)ter bzw. (0,1)ter Stufe.