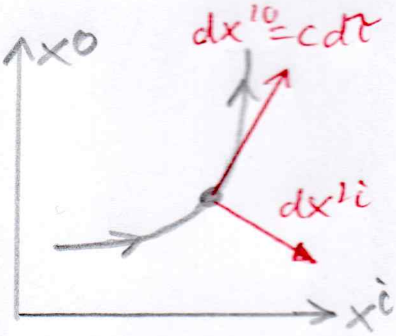
12 Relativistische Mechanik:

Die Newtonsche Mechanik ist invariant unter Galilei-Transformationen und widerspricht demnach den Grundprinzipien der Speziellen Relativitätstheorie. Deshalb wurde die Newtonsche Mechanik von Einstein dahingehend erweitert, dass sie invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Die dadurch entstandene Relativistische Mechanik beinhaltet die richtigen Bewegungsgleichungen für solche Teilchen, deren Geschwindigkeiten in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit kommen.

12.1 Eigenzeit:



Ein Teilchen bewege sich entlang einer Trajektorie. Dann läßt sich in jedem Punkt der Trajektorie ein momentanes Ruhesystem des Teilchens einführen. Eine infinitesimale Veränderung der Eigenzeit $d\tau = dt'$ in diesem Ruhesystem hängt dann über die Zeitdilatation (11.9) mit der infinitesimalen Veränderung dt der Zeit im Laborsystem zusammen:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\; dt \qquad (12.1)$$

Dabei ist im momentanen Ruhesystem die infinitesimale Veränderung des Raum-Zeit-Abstandes

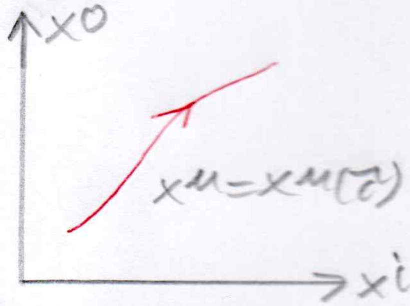
$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 \qquad (12.2)$$

ein Lorentz-Skalar, so dass auch die infinitesimale Veränderung der Eigenzeit $d\tau$ ein Lorentz-Skalar ist. Integriert man (12.1) zwischen zwei Ereignissen, so folgt ein Zusammenhang zwischen der Eigenzeit und der Laborzeit:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}\; dt \qquad (12.3)$$

12.2 Vierer-Geschwindigkeitsvektor:

Wir verwenden im folgenden die Eigenzeit $\tau = t'$ als Parameter, um die Trajektorie des Teilchens in der vierdimensionalen Raum-Zeit zu parametrisieren:



$$x^\mu = x^\mu(\tau) \qquad (12.4)$$

Deshalb definiert dann

$$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \qquad (12.5)$$

einen Geschwindigkeitsvektor. Da $d\tau$ ein Lorentz-Skalar ist und sich dx^μ wie ein Vierervektor transformiert, ist auch (12.5) ein Vierervektor. Verwendet man die Zeitdilatation (12.1), so kann man aber auch die Laborzeit t als Parameter verwenden

$$x^\mu = x^\mu(t) \qquad (12.6)$$

und erhält aus (12.5)

$$u^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}\,\frac{dx^\mu(t)}{dt} \qquad (12.7)$$

Einsetzen von (11.45) in (12.7) führt dann auf

$$(u^\mu(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix} \qquad (12.8)$$

Wir bilden das Skalarprodukt des Vierer-Geschwindigkeitsvektors mit sich selber:

$$u_\mu(t)\,u^\mu(t) \underset{(11.50),\,(11.76)}{=} u^0(t)^2 - \vec{u}(t)^2 \underset{(12.8)}{=} c^2 \qquad (12.9)$$

Demnach ist (12.9) manifest ein Lorentz-Skalar. Das bedeutet also, dass die Lichtgeschwindigkeit c in allen Inertialsystemen denselben Wert hat und sich nicht beim Wechsel in ein anderes Inertialsystem ändert.

12.3 Newton-Gleichung:

Die Newtonsche Bewegungsgleichung gilt nicht allgemein in der Speziellen Relativitätstheorie. Wir fordern aber, dass die Newtonsche Bewegungsgleichung im momentanen Ruhesystem gilt. Das heißt, dass zwar im momentanen Ruhesystem $\vec{v}' = \vec{0}$ aber im allgemeinen $d\vec{v}'/dt' \neq \vec{0}$ ist mit

$$m\,\frac{d\vec{v}'(t')}{dt'} = \vec{F}' \qquad (12.10)$$

Hierbei bezeichnet m die Ruhemasse des Teilchens, $\vec{F}'$ die im Ruhesystem wirkende Kraft auf das Teilchen und $t' = \tau$ die Eigenzeit.

12.4 Verallgemeinerung der Newton-Gleichung:

Mit Hilfe des Vierer-Geschwindigkeitsvektors (12.5) definieren wir den Vierer-Impulsvektor

$$p^\mu(\tau) = m u^\mu(\tau) \qquad (12.11)$$

wobei dann aus (12.9) folgt

$$p_\mu(\tau) p^\mu(\tau) = m^2 c^2 \qquad (12.12)$$

Demnach ist auch die Masse m ein Lorentz-Skalar. Die verallgemeinerte Newton-Gleichung lautet dann

$$m \frac{du^\mu(\tau)}{d\tau} \underset{(12.11)}{=} \frac{dp^\mu(\tau)}{d\tau} = F^\mu \qquad (12.13)$$

Im Ruhesystem gilt wegen $\tau = t'$ für die linke Seite

$$\left(\frac{du'^\mu(\tau)}{d\tau} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{v}'(t')}{dt'} \end{pmatrix} \qquad (12.14)$$

und entsprechend auf der rechten Seite

$$(F'^\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}' \end{pmatrix} \qquad (12.15)$$

damit (12.13) tatsächlich in (12.10) übergeht. Wir erhalten nun den Vierer-Kraftvektor F^μ in Σ aus dem Vierer-Kraftvektor F'^μ im Ruhesystem Σ', indem wir analog zu (11.48) eine Lorentz-Transformation anwenden:

$$F^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu F'^\nu \qquad (12.16)$$

Explizit in Komponenten ausgeschrieben lautet dies für eine Bewegung in x-Richtung mit (11.47) und (12.15):

$$\begin{pmatrix} F^0 \\ F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_1' \, v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{F_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ F_2' \\ F_3' \end{pmatrix} \qquad (12.17)$$

Für eine allgemeine Lorentz-Transformation in ein mit $\vec{v}$ bewegtes Koordinatensystem kann man zeigen, siehe z. B. Fließbach - Mechanik, dass (12.17) übergeht in

$$\begin{pmatrix} F^0 \\ F^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} & \frac{v_j/c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \\ \frac{v_i/c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} & \delta_{ij} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} - 1\right)\frac{v_i v_j}{\vec{v}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F'_j \end{pmatrix} \qquad (12.18)$$

Eine Ausmultiplikation führt auf

$$\begin{pmatrix} F^0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}/c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \\ \vec{F}' + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} - 1\right)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F}')\vec{v}}{\vec{v}^2} \end{pmatrix} \qquad (12.19)$$

12.5 Relativistische Energie:

Wir betrachten nun die 0-Komponente der relativistischen Newton-Gleichung (12.13). Aus (12.8) und (12.19) folgt

$$mc \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \frac{\vec{v}\cdot\vec{F}'}{c} \qquad (12.20)$$

Mit Hilfe von (12.1) läßt sich die Eigenzeit τ in (12.20) durch die Laborzeit t ersetzen:

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}(t)^2/c^2}} = \vec{v}\cdot\vec{F}' \qquad (12.21)$$

Hierbei bezeichnet $\vec{v}\cdot\vec{F}'$ die auf das Teilchen übertragene Leistung. Deshalb identifizieren wir

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \qquad (12.22)$$

mit der relativistischen Energie des Teilchens. Aus (12.8), (12.11) und (12.22) lesen wir ab, dass die Energie E des Teilchens in der nullten Komponente des Vierer-Impulsvektors auftritt

$$p^0 = \frac{E}{c} \qquad (12.23)$$

Mit dem Ansatz

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad (12.24)$$

erhalten wir für den räumlichen Anteil des Vierer-

Impulsvektors:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \tag{12.25}$$

Aus (12.12) und (12.24) folgt dann

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 \tag{12.26}$$

Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet demnach

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2} \tag{12.27}$$

Im nichtrelativistischen Limes $|\vec{p}| \ll mc$ folgt dann

$$E \overset{(12.27)}{=} mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \ldots \tag{12.28}$$

Demnach besitzt ein ruhendes Teilchen die Ruheenergie mc^2. Dies hat wichtige physikalische Konsequenzen z.B. bei Kernfusion oder Kernspaltung und hat zur Entwicklung der Atombombe geführt. Ein sich langsam bewegendes Teilchen hat nach (12.28) die übliche nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung. Im relativistischen Limes $|\vec{p}| \gg mc$ erhalten wir dagegen aus (12.27)

$$E = |\vec{p}|c \tag{12.29}$$

Sie gilt z.B. für Photonen, deren Ruhemasse verschwindet: $m=0$.