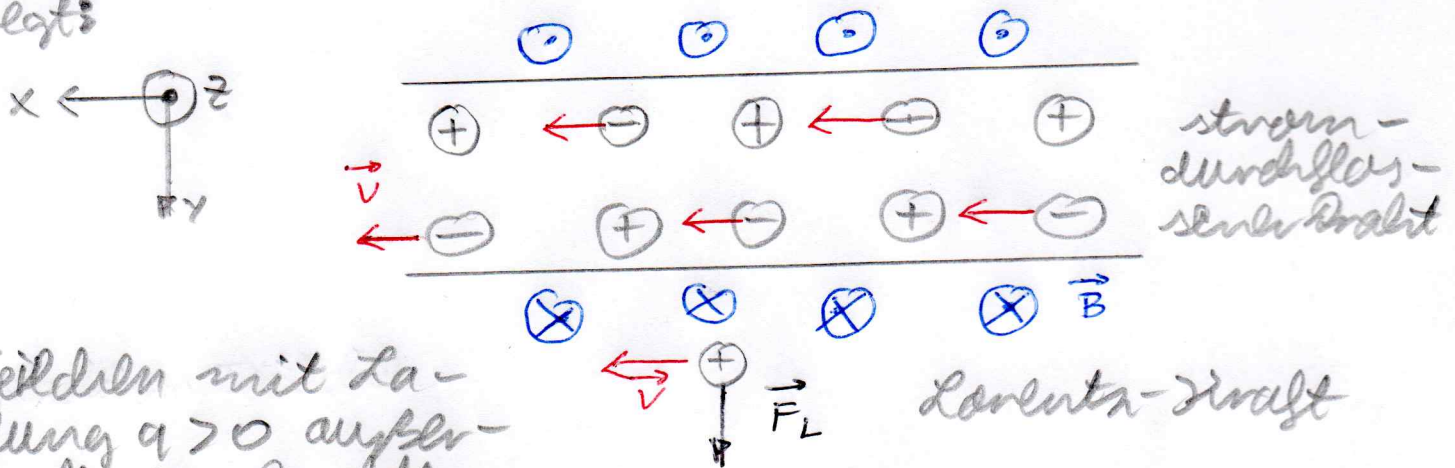


# 13 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Wir diskutieren nun die Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie für die Elektrodynamik. Hierzu zeigen wir, dass Lorentz-Transformationen zwischen Inertialsystemen zu Transformationen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern führen. Führt man aber das elektrische und das magnetische Feld zu einem Feldstärkensor zusammen, so lassen sich die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik kovariant formulieren. Das bedeutet, dass sich die Maxwell-Gleichungen so formulieren lassen, dass ihre Invarianz unter Lorentz-Transformationen offensichtlich ist.

## 13.1 Phänomenologische Beschreibung:

Wir betrachten ein Teilchen der Ladung  $q$  in der Nähe eines stromdurchflossenen Drahtes, das sich mit derselben Geschwindigkeit wie die Elektronen im Draht bewegt:



Teilchen mit Ladung  $q > 0$  außerhalb des Drahtes

Diese Situation beschreiben wir nun in zwei Inertialsystemen.

Im Ruhesystem des Drahtes ist der Draht elektrisch neutral. Die positiv geladenen Ionenrümpfe ruhen und die negativ geladenen Elektronen bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Durch den Stromfluss entsteht gibt es ein Magnetfeld  $\vec{B}$ , sodass die außen mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte Ladung  $q$  eine Lorentz-Kraft  $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$  erfährt. Ist  $q > 0$  so zeigt  $\vec{F}_L$  immer senkrecht zum Draht weg von ihm.

Im Ruhesystem des Teilchens fließt kein Strom, so dass es weder ein Magnetfeld noch eine Lorentz-Kraft geben kann. Andererseits verlangt das Relativitätsprinzip, dass das Teilchen auch in seinem eigenen Ruhesystem eine Kraft erfährt. Durch die folgenden physikalischen Überlegungen kann man sich klar machen, dass es sich hierbei um eine Kraft handelt, die durch ein elektrisches Feld vermittelt wird.

Beim Wechsel zwischen beiden Inertialsystemen verändert sich die Anzahl und die Stärke der einzelnen Ladungen nicht. Aber im Ruhesystem des Teilchens sind die positiv geladenen Stromröhre bewegt, so dass sie durch die Längenkontraktion bedingt etwas näher zusammenrücken. Demgegenüber ruhen nun die negativ geladenen Elektronen, sie erfahren aber keine Längenkontraktion und sind somit etwas weiter voneinander entfernt als die positiv geladenen Stromröhre. Deshalb zeigt der Kraft im Ruhesystem des Teilchens einen positiven Ladungsüberschuss, der zu einem elektrischen Feld und damit zu einer elektrostatischen Kraft auf das ruhende, geladene Teilchen führt.

Demnach können wir festhalten, dass das elektrische und das magnetische Feld keine absoluten physikalischen Größen darstellen, da sie sich beim Wechsel von einem in ein anderes Inertialsystem verändern. Wir werden daher nun den elektromagnetischen Feldstärketensor einführen, aus dessen Transformationsverhalten beim Wechsel des Inertialsystems sich dann die entsprechenden Transformationen des elektrischen und magnetischen Feldes ergeben.

### 13.2 Elektromagnetischer Feldstärketensor:

Wir führen nun eine antisymmetrische  $4 \times 4$ -Matrix ein, die sowohl die Komponenten des elektrischen Feldstärkes  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  als auch die der magnetischen Induktion  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  beinhaltet. Als kovariante elektromagnetische Feldstärketensor lautet:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (13.1)$$

Der entsprechende kontravariante elektromagnetische Feldstärketensor folgt dann aus

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (13.2)$$

Einsetzen von (11.79) und (13.1) in (13.2) führt auf

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

Die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\text{div } \vec{B} \stackrel{(4.13)}{=} 0 \quad (13.4)$$

$$\text{rot } \vec{E} \stackrel{(4.14)}{=} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (13.5)$$

lassen sich nun mit Hilfe des kovarianten elektromagnetischen Feldstärketensors wie folgt zusammenschreiben:

$$\partial_x F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \quad (13.6)$$

Wir bemerken, dass die einzelnen Terme in (13.6) durch zyklische Vertauschung der Indizes ineinander übergehen. Außerdem ist zu beachten, dass der Vierergradient definiert wird durch

$$(\partial_\mu) = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (13.7)$$

Das bedeutet also, dass die partiellen Ableitungen nach den kontravarianten Komponenten des Vierer-Ortsvektors zu kovarianten Komponenten des Vierergradienten führen. Wir erhalten aus (13.6) durch  $\lambda = 0, \mu = 1$  und  $\nu = 2$

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} \stackrel{(13.1), (13.7)}{=} -\frac{1}{c} \left( \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_2 = 0 \quad (13.8)$$

und entsprechend durch  $\lambda=0, \mu=2, \nu=3$

$$\partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} \underline{(13.1), (13.7)} - \frac{1}{c} \left( \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_x = 0 \quad (13.9)$$

und durch  $\lambda=0, \mu=3, \nu=1$

$$\partial_0 F_{31} + \partial_3 F_{10} + \partial_1 F_{03} \underline{(13.1), (13.7)} - \frac{1}{c} \left( \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_y = 0 \quad (13.10)$$

Ferner erhalten wir aus (13.6) für  $\lambda=1, \mu=2, \nu=3$

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} \underline{(13.1), (13.7)} - \text{div } \vec{B} = 0 \quad (13.11)$$

### 13.3 Lorentz-Transformationen:

Wir führen eine Lorentz-Transformation von einem in ein anderes Inertialsystem durch und fordern, dass sich der kontravariante elektromagnetische Feldstärketensor (13.3) wie ein Tensor (2,0)ter Stufe transformiert, siehe Abschnitt 11.5.8:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (13.12)$$

Einsetzen von (11.47) und (13.3) in (13.12) führt schließlich auf

$$(F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x/c & -E'_y/c & -E'_z/c \\ E'_x/c & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y/c & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z/c & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \quad (13.13)$$

Dabei lauten die transformierten elektrischen Felder

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E'_z &= \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (13.14)$$

und entsprechend die transformierten magnetischen Felder

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \frac{B_y + v E_z/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ B'_z &= \frac{B_z - v E_y/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (13.15)$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir erneut den Draht von Abschnitt 13.1. Im Ruhesystem des Drahtes ist  $\vec{E} = \vec{0}$  und  $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ . Für das Ruhesystem des Teilchens folgt dann

$$\vec{E}' = -\frac{v B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{e}_y \quad (13.16)$$

d.h. es wirkt ein elektrisches Feld in  $y$ -Richtung und nach (13.15) wirkt auch noch ein magnetisches Feld in  $z$ -Richtung

$$\vec{B}' = \frac{B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{e}_z \quad (13.17)$$

Wir betrachten nun, welche Kräfte in dem jeweiligen Bezugssystem auf das Teilchen der Ladung  $q$  wirken, das sich mit derselben Geschwindigkeit wie die Elektronen im Draht bewegt. Im Ruhesystem des Drahtes wirkt nach (4.18) die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q (v \vec{e}_x) \times (B_z \vec{e}_z) = -q v B_z \vec{e}_y \quad (13.18)$$

Im Ruhesystem des Teilchens wirkt dagegen aufgrund von (4.18) und (13.16) nur eine elektrostatische Kraft

$$\vec{F}' = q \vec{E}' = -\frac{q v B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{e}_y \quad (13.19)$$

Demnach sind die Richtungen beider Kräfte (13.18), (13.19) dieselben. Aber vom Betrag her ist  $F'$  aufgrund der Längenkontraktion größer als  $F$ .

Wir bemerken, dass sich die Transformation des elektrischen und des magnetischen Feldes auch für den Fall einer allgemeinen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  angeben lässt. Hierzu ist wieder (13.12) zu verwenden, dieses Mal aber mit der allgemeinen Lorentz-Transformation (12.18). Wir führen die entsprechende Matrixmultiplikation nicht explizit vor, sondern beschränken uns auf die Angabe des Ergebnisses. Hierzu bezeichnen wir mit  $\parallel$  und  $\perp$  die jeweiligen Felder parallel und senkrecht zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und erhalten für das transformierte elektrische Feld

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad (13.20)$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

und entsprechend für das transformierte magnetische Feld

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

(13.21)

$$\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}_{\perp} / c^2}{\gamma(1 - \vec{v}^2/c^2)}$$

Wir können also festhalten, dass  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht unabhängig voneinander sind. Ein reines  $\vec{E}$ -Feld in einem Inertialsystem erscheint als eine Mischung von  $\vec{E}'$  und  $\vec{B}'$  in einem anderen Inertialsystem und umgekehrt. Entsprechendes gilt auch für ein reines  $\vec{B}$ -Feld. Daher verwendet man für den Wechsel zwischen Inertialsystemen den elektromagnetischen Feldstärkevektoren  $F^{\mu\nu}$  und nicht die separaten Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ .

### 13.4 Kontinuitätsgleichung:

Durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

(13.22)

lässt sich relativistisch kovariant formulieren. Um zu führen wir die Vierer-Stromdichte

$$j^{\mu} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

(13.23)

ein, deren zeitliche Komponente die Ladungsdichte  $\rho$  und deren räumliche Komponenten die Stromdichte  $\vec{j}$  beinhalten. In der Tat lässt sich (13.22) mit Hilfe von (13.7) und (13.23) durch

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

(13.24)

kompakt relativistisch kovariant formulieren. Wir fordern nun, dass sich die Vierer-Stromdichte (13.23) wie ein Tensor (1,0)ter Stufe transformiert

$$j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} j^{\nu}$$

(13.25)

Einsetzen von (11.47) und (13.23) in (13.25) führt auf

$$j'^0 = \frac{\rho - v j_x}{\gamma(1 - v^2/c^2)}$$

$$j'_x = \frac{j_x - v \rho}{\gamma(1 - v^2/c^2)}$$

(13.26)

$$j'_y = j_y$$

$$j'_z = j_z$$

Dies bedeutet anschaulich, dass eine ruhende Ladung  $\rho \neq 0, \vec{j} = \vec{0}$  in  $\Sigma$  in  $\Sigma'$  als Ladung  $\rho' \neq 0$  und Strom  $\vec{j}' \neq \vec{0}$

erscheint. Da bei diesem Wechsel der Inertialsysteme eine Längenkontraktion auftritt, enthält (13.26) den Faktor  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ .

13.5 Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

Auch die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\text{div } \vec{E} \stackrel{(4.12)}{=} \frac{\rho}{\epsilon_0} \stackrel{(4.17)}{=} \mu_0 c^2 \rho \quad (13.27)$$

$$\text{rot } \vec{B} \stackrel{(4.15)}{=} \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (13.28)$$

lassen sich relativistisch kovariant formulieren. Mit Hilfe des kontravarianten elektromagnetischen Feldstärketensors erhalten wir

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (13.29)$$

In der Tat reduziert sich (13.29) z. B. für  $\nu=0$  auf

$$\partial_i F^{i0} = \frac{1}{c} \text{div } \vec{E} = \mu_0 j^0 \stackrel{(13.23)}{=} \mu_0 c \rho \stackrel{(13.27)}{=} \mu_0 c \rho$$

während wir für  $\nu=i$  erhalten

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &\stackrel{(13.3), (13.7)}{=} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \text{rot } \vec{B}\right)_x = \mu_0 j_x \\ \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} &\stackrel{(13.3), (13.7)}{=} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \text{rot } \vec{B}\right)_y = \mu_0 j_y \\ \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} &\stackrel{(13.3), (13.7)}{=} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \text{rot } \vec{B}\right)_z = \mu_0 j_z \end{aligned} \right\} \stackrel{(13.28)}{=}$$

Wir bemerken noch, dass sich aus (13.29) unmittelbar die Kontinuitätsgleichung (13.24) ableiten lässt. Bilden wir die Divergenz von (13.29), so folgt aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors:

$$0 \stackrel{(13.29)}{=} \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \stackrel{(13.29)}{=} \mu_0 \partial_\nu j^\nu \stackrel{(13.24)}{=}$$

13.6 Vierer-Vektorpotential:

Im Abschnitt 6.2 hatten wir aus den homogenen Maxwell-Gleichungen (13.4) und (13.5) mit Hilfe des Helmholtzschen Vektorzerlegungssatzes abgeleitet, dass sich die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}, \vec{B}$  durch Differentialquotienten aus dem skalaren Potential  $\phi$  und dem Vektorpotential  $\vec{A}$  ableiten lassen:

$$\vec{B} \stackrel{(6.5)}{=} \text{rot } \vec{A} \quad (13.30)$$

$$\vec{E} \stackrel{(6.6)}{=} -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (13.31)$$

Wir lassen nun skalares Potential  $\phi$  und Vektorpo-

potential  $\vec{A}$  zu einem kontravarianten Vierer-Vektor-potential zusammen:

$$(A^\mu) = \left( \frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right) \quad (13.32)$$

Entsprechend lautet das kovariante Vierer-Vektor-potential

$$(A_\mu) = \underline{\underline{(11.50), (11.76)}} \left( -\frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right) \quad (13.33)$$

Damit können wir (13.30), (13.31) kovariant zusammenfassen zu

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (13.34)$$

In der Tat erhalten wir aus (13.7), (13.33), (13.34):

$$F_{0i} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-A_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varphi}{c} \stackrel{(13.31)}{=} \frac{E_i}{c} \quad \checkmark$$

$$F_{21} = \frac{\partial}{\partial y} (-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} (-A_y) = (\text{rot } \vec{A})_z \stackrel{(13.30)}{=} B_z \quad \checkmark$$

$$F_{32} = \frac{\partial}{\partial z} (-A_y) - \frac{\partial}{\partial y} (-A_z) = (\text{rot } \vec{A})_x \stackrel{(13.30)}{=} B_x \quad \checkmark$$

$$F_{13} = \frac{\partial}{\partial x} (-A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (-A_x) = (\text{rot } \vec{A})_y \stackrel{(13.30)}{=} B_y \quad \checkmark$$

Demnach beinhaltet (13.34) schon die homogenen Maxwell-Gleichungen. Das sehen wir durch explizit durch, dass (13.6) aufgrund von (13.34) automatisch erfüllt ist:

$$\cancel{\partial_x(\partial_x A_z - \partial_z A_x)} + \cancel{\partial_y(\partial_y A_z - \partial_z A_y)} + \partial_z(\cancel{\partial_x A_y - \partial_y A_x}) = 0 \quad \checkmark$$

Zurück haben wir angenommen, dass das Vierer-Vektorpotential mindestens zweimal stetig differenzierbar ist (Satz von Schwarz):

$$\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda = \partial_\nu \partial_\mu A_\lambda \quad (13.35)$$

Setzen wir das in (13.34) in die kovariante Form der Maxwell-Gleichungen (13.29) ein, so folgt

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \mu_0 j^\nu \quad (13.36)$$

Zurück haben wir den D'Alembert-Operator eingeführt:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu \stackrel{(11.80)}{=} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \stackrel{(11.79), (13.7)}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (13.37)$$

abei besagt (13.36), dass die Komponenten des Vierer-Vektorpotentials gekoppelte Differentialgleichungen genügen.



Man kann nun aber ausnutzen, dass das Vierer-Vektorpotential nicht eindeutig definiert ist. Führt man nämlich die Eichtransformation

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda \quad (13.38)$$

durch, so bleibt der elektromagnetische Feldstärketensor (13.34)

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \quad (13.39)$$

und damit auch die elektromagnetischen Felder invariant, sofern die Eichfunktion  $\Lambda$  mindestens zweimal stetig differenzierbar ist (Satz von Schwarz)

$$\partial_\mu \partial_\nu \Lambda = \partial_\nu \partial_\mu \Lambda \quad (13.40)$$

Offenbar handelt es sich bei (13.38) gerade um die Eichtransformation (6.8), (6.9)

$$A'_0 = A_0 - \partial_0 \Lambda \quad (13.7), (13.33) \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (6.8)$$

$$A'_i = A_i - \partial_i \Lambda \quad (13.7), (13.33) \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \Lambda \quad (6.9)$$

Nun nutzen die Eichfreiheit aus und wählen die Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (13.41)$$

reduziert sich (13.41) aufgrund von (13.7) und (13.33) auf die frühere Lorenz-Eichung (6.14). Mit dieser Lorenz-Eichung (13.41) entkoppeln die Bewegungsgleichungen (13.36) und wir erhalten zur Bestimmung des Vierer-Vektorpotentials

$$\square A^\nu = \mu_0 \dot{j}^\nu \quad (13.42)$$

Aufgrund des Qualla-Operators (13.37) stellen (13.42) inhomogene Wellengleichungen dar die aufgrund von (4.17), (13.23), (13.37) mit (6.15), (6.16) übereinstimmen.