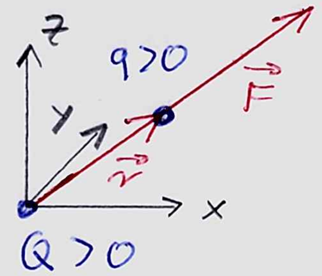
2. Elektrostatik:

Mit Hilfe der in Kapitel 1 eingeführten mathematischen Grundlagen formulieren wir nun die Gesetze der Elektrostatik. Insbesondere leiten wir dabei mit den Integralsätzen von Gauß und Stokes die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik ab.

2.1 Fluß der elektrischen Feldstärke:



Wir betrachten die Coulomb-Kraft, die eine im Ursprung lokalisierte Ladung Q auf eine Probeladung q am Orte $\vec{r}$ ausübt. Im SI-Einheitensystem gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{2.1}$$

wobei die Dielektrizitätskonstante im Vakuum gegeben ist durch

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \tag{2.2}$$

Demnach erzeugt die Ladung Q am Orte $\vec{r}$ eine elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \tag{2.3}$$

die von der Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{2.4}$$

ist. Wir berechnen nun den Fluß dieser elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ durch die Oberfläche einer Kugel $K(R)$ mit Radius R:

$$\Phi = \oint_{K(R)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \tag{2.5}$$

Dieses Oberflächenintegral berechnet sich in Kugelkoordinaten wie folgt:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \,\sin\vartheta\, \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\, R^2 \cdot \frac{\vec{r}}{R} \tag{2.6}$$

Berücksichtigt man, dass auf der Kugeloberfläche $\vec{r}^{\,2} = |\vec{r}|^2 = R^2$ gilt, reduziert sich (2.6) auf

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} d\vartheta\,\sin\vartheta\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.7}$$

Dieses Ergebnis lässt sich in der Elektrostatik auf eine beliebige Ladungsverteilung verallgemeinern. Der Fluß der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ durch eine geschlossene Oberfläche F ergibt die umschlossene Ladung Q nach dem Gauß-Gesetz

$$\Phi = \oint_F \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (2.8)$$

2.2 Überlegung:

Wir betrachten wieder die elektrische Feldstärke (2.4) einer im Ursprung lokalisierten Ladung Q. Differenziert man deren x-Komponente

$$E_x(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (2.9)$$

nach x, so folgt

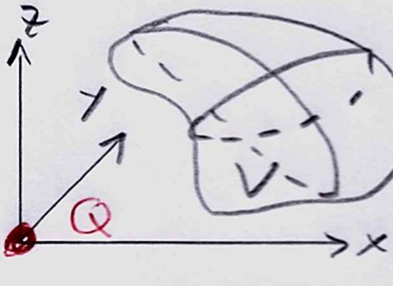
$$\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right\} \qquad (2.10)$$

Deshalb erhalten wir für die Divergenz der elektrischen Feldstärke für $\vec{r} \neq \vec{0}$:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) \stackrel{(1.11)}{=} \frac{\partial E_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial z}$$

$$\stackrel{(2.10)}{=} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right\} = 0 \qquad (2.11)$$

Wir betrachten nun ein beliebiges Volumen V, das den Ursprung nicht enthält und berechnen den Fluß der elektrischen Feldstärke (2.4) durch die Oberfläche F mit Hilfe des Satzes von Gauß



$$\oint_F \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \stackrel{(1.31)}{=} \int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r})\, dV \stackrel{(2.11)}{=} 0 \qquad (2.12)$$

Das Ergebnis besagt, dass im Mittel gleich viele Feldlinien in das Volumen V hinein- und hinauszeigen. Der Fluß der elektrischen Feldstärke (2.4) verschwindet auch gemäß des Gauß-Gesetzes (2.8), weil sich im betrachteten Volumen V keine Ladungen befinden.

2.3 Erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik:

Aus dem ersten Grundgesetz der Elektrostatik (2.8) folgt einerseits mit dem Satz von Gauß (1.31)

$$\Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r})\, dV \qquad (2.13)$$

wobei V das Volumen bezeichnet, das von der Fläche F umschlossen wird. Andererseits läßt sich die Ladung Q durch ein Volumenintegral über die Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ darstellen, so dass aus (2.8) folgt

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho(\vec{r})\, dV \qquad (2.14)$$

Aus dem Vergleich von (2.13) und (2.14) lesen wir ab

$$\int_V dV \left\{ \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\vec{r}) \right\} = 0 \qquad (2.15)$$

Da diese Aussage für jedes beliebige Volumen V gilt, erhalten wir hieraus die erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\vec{r}) \qquad (2.16)$$

2.4 Zirkulation der elektrischen Feldstärke:

Wir kehren wieder zur elektrischen Feldstärke (2.4) einer im Ursprung lokalisierten Ladung Q zurück und berechnen deren Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve C:

$$Z = \oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (2.17)$$

Einsetzen von (2.4) in (2.17) führt unter Beachtung von (1.6) auf

$$Z = - \oint_C \operatorname{grad} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \right) \cdot d\vec{r} \qquad (2.18)$$

so dass aufgrund von (1.1) folgt

$$Z = - \oint_C d \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \right) = - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}_A|} - \frac{1}{|\vec{r}_B|} \right) \qquad (2.19)$$

Da aber die Kurve C geschlossen ist, gilt $\vec{r}_A = \vec{r}_B$ und die Zirkulation verschwindet:

$$Z = 0 \qquad (2.20)$$

Dieses Ergebnis lässt sich im Rahmen der Elektrostatik auf eine beliebige Ladungsverteilung verallgemeinern.

2.5 Zweite Maxwell-Gleichung der Elektrostatik:

Aus dem zweiten Grundgesetz der Elektrostatik (2.17), (2.20) folgt mit Hilfe des Satzes von Stokes (1.40)

$$\oint_F \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0 \qquad (2.21)$$

Da dies für jede beliebige Fläche F gilt, folgt hieraus

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad (2.22)$$

Im Falle einer im Ursprung lokalisierten Punktladung Q läßt sich (2.22) auch explizit ausrechnen. Aus (1.25) und (2.4) folgt nämlich:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = \vec{0} \qquad (2.23)$$

2.6 Poisson-Gleichung:

Für die elektrische Feldstärke (2.4) einer im Ursprung lokalisierten Ladung Q gilt, wie schon in (2.17), (2.18) verwendet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}|}\right) \qquad (2.24)$$

Aber auch für eine beliebige Ladungsverteilung läßt sich die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ immer als Gradient eines Skalarfeldes $\varphi(\vec{r})$ darstellen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) \qquad (2.25)$$

Das liegt an der zweiten Maxwell-Gleichung der Elektrostatik (2.22) und der Identität der Vektoranalysis

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) \stackrel{(1.6),\,(1.25)}{=} \vec{0} \qquad (2.26)$$

sofern $\varphi(\vec{r})$ zwei Mal stetig differenzierbar ist und der Satz von Schwarz gilt:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x \partial z} \qquad (2.27)$$

Im Falle der Elektrostatik bezeichnet man $\varphi(\vec{r})$ als elektrostatisches Potential. Setzen wir (2.25) in die erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik (2.16) ein, so erhalten wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho(\vec{r}) \qquad (2.28)$$

Hierbei bezeichnet

$$\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad} \underline{\underline{(1.6),(1.11)}}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (2.29)$$

den Laplace-Operator. Die Poisson-Gleichung (2.28) gibt an, wie man das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ aus einer gegebenen Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ berechnet. Ist das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ bekannt, so läßt sich durch den Gradienten gemäß (2.25) die entsprechende elektrische Feldstärke berechnen.

2.7 Poisson-Gleichung für eine Punktladung:

Im Falle einer im Ursprung lokalisierten Ladung Q lautet die Ladungsdichte

$$\varrho = Q\ \delta(\vec{r}) \qquad (2.30)$$

Hierbei bezeichnet $\delta(\vec{r})$ die Diracsche Deltafunktion. Sie ist durch die beiden Eigenschaften

$$(D1)\quad \delta(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq \vec{0} \qquad (2.31)$$

$$(D2)\quad \int_{K(R)} \delta(\vec{r})\, dV = 1 \qquad (2.32)$$

für jede noch so kleine Kugel $K(R)$ mit Radius R definiert. Offensichtlich gilt deshalb für die Ladungsdichte (2.30):

$$\int \varrho(\vec{r})\, dV \ \underline{\underline{(2.30),(2.32)}}\ Q \qquad (2.33)$$

Einsetzen von (2.30) in (2.28) führt auf die Poisson-Gleichung für eine Punktladung:

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{r}) \qquad (2.34)$$

Gemäß (2.24) und (2.25) besitzt sie die Lösung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}|} \qquad (2.35)$$

Einsetzen von (2.35) führt dann auf die Distributionenidentität

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}) \qquad (2.36)$$

Wir wollen nun aber (2.36) auch direkt beweisen.

Es sei zunächst $\vec{r} \neq \vec{0}$. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \tag{2.37}$$

sodass sich hieraus

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq \vec{0} \tag{2.38}$$

in Übereinstimmung mit (2.31) und (2.36) ergibt. Nun muss nur noch (2.32) überprüft werden. Hierzu betrachten wir das Volumenintegral

$$I = \frac{-1}{4\pi} \int_{K(R)} \Delta \frac{1}{|\vec{r}|} \, dV \tag{2.39}$$

für eine Kugel $K(R)$ mit Radius R. Aufgrund von (2.29) erhalten wir

$$I = \frac{-1}{4\pi} \int_{K(R)} \operatorname{div}\left(\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}|}\right) dV \tag{2.40}$$

so daß der Satz von Gauß (1.31) angewandt werden kann:

$$I = \frac{-1}{4\pi} \oint_{O(R)} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \oint_{O(R)} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{F} \tag{2.41}$$

Hierbei bezeichnet $O(R)$ die Oberfläche der Kugel $K(R)$. Die Berechnung des Oberflächenintegrals erfolgt analog zu (2.6) und ergibt

$$I = 1 \tag{2.42}$$

in Übereinstimmung mit (2.32) und (2.36).

2.8 Greensche Funktion der Poisson-Gleichung

Wir lösen nun formal die Poisson-Gleichung (2.28) für eine beliebige Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$. Hierzu verwenden wir die beiden Eigenschaften (2.31) und (2.32) der Diracschen Deltafunktion und erhalten zunächst

$$\varphi(\vec{r}) = \int \varphi(\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \, dV' \tag{2.43}$$

Mit Hilfe der Distributionenidentität (2.36) geht (2.43) über in

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int \varphi(\vec{r}\,') \, \Delta' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, dV' \tag{2.44}$$

Aufgrund von (2.29) können wir dies nun umschreiben zu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi}\left\{\int dV'\, \vec{\nabla}'\cdot\left[\varphi(\vec{r}\,')\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] - \int dV'\, \vec{\nabla}'\varphi(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\} \quad (2.45)$$

Beim ersten Volumenintegral in (2.45) läßt sich der Satz von Gauß (2.31) anwenden. Dabei ist das entsprechende Oberflächenintegral im Unendlichen auszuwerten. Da wir davon ausgehen, dass das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ im Unendlichen schnell genug verschwindet, verschwindet auch das Oberflächenintegral und (2.45) reduziert sich auf

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int dV'\, \vec{\nabla}'\varphi(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad (2.46)$$

Wir führen nun analog eine weitere partielle Integration durch, so dass (2.46) übergeht zu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi}\int dV'\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\Delta'\varphi(\vec{r}\,') \quad (2.47)$$

Einsetzen der Poisson-Gleichung (2.28) führt dann auf das Ergebnis

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV'\, G(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\varrho(\vec{r}\,') \quad (2.48)$$

Es besagt, dass es zwischen der Ladungsdichte $\varrho(\vec{r}\,')$ und dem elektrostatischen Potential $\varphi(\vec{r})$ einen linearen Zusammenhang gibt. Der Integralkern in (2.48) wird als Greensche Funktion bezeichnet und ist gegeben durch

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad (2.49)$$

Das bedeutet, dass die Greensche Funktion dem Coulomb-Potential einer am Orte $\vec{r}\,'$ sitzenden Einheitsladung $Q=1$ entspricht. Aus der Lösung (2.48), (2.49) der Poisson-Gleichung (2.28) läßt sich gemäß (2.25) die elektrische Feldstärke berechnen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dV'\, \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \quad (2.50)$$

Demnach sind das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ und die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ einer beliebigen Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ durch (2.48)–(2.50) definiert. Damit lassen sich alle Phänomene der Elektrostatik beschreiben.