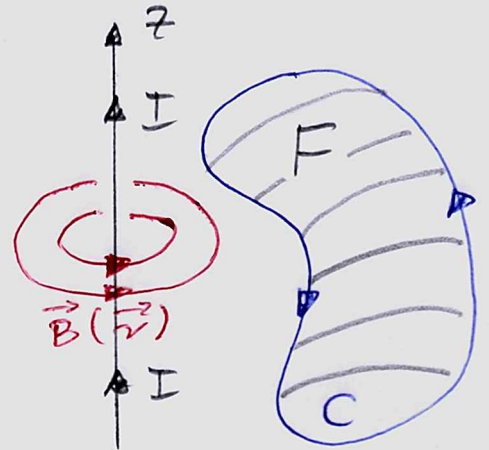


3. Magnetostatik:

Analog zur Formulierung der Elektrostatik in Kapitel 2 verwenden wir nun die mathematischen Grundlagen von Kapitel 1, um die Grundgesetze der Magnetostatik aufzustellen.

3.1 Zirkulation der magnetischen Feldstärke:

Das Biot-Savart-Gesetz besagt, dass ein Strom I in einem geraden Draht ein magnetisches Feld erzeugt, dessen Feldlinien konzentrische Kreise um den Draht darstellen. Dabei fällt die Stärke des magnetischen Feldes umgekehrt proportional zum Abstand vom Draht ab. Im SI-Einheitensystem lautet das Biot-Savart-Gesetz



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

wobei die Permeabilitätskonstante im Vakuum gegeben ist durch

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (3.2)$$

Es sei nun F eine beliebige Fläche, die keinen Punkt der z -Achse enthält. Wir berechnen mit Hilfe des Satzes von Stokes (1.40) die Zirkulation von $\vec{B}(\vec{r})$ entlang des Randes C der Fläche F :

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (3.3)$$

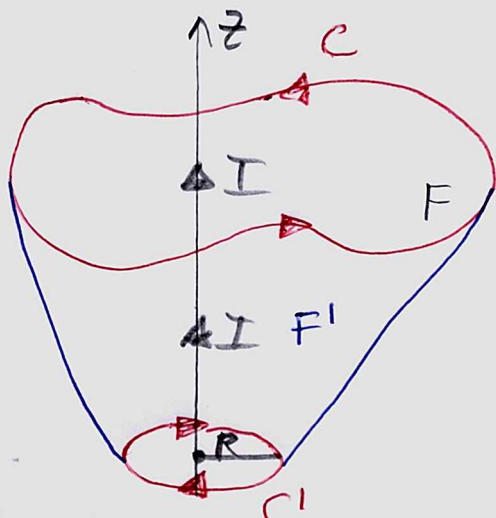
Für die Rotation des Magnetfeldes (3.1) gilt:

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \quad (3.4)$$

für $\vec{r} \neq \vec{0}$. Deshalb erhalten wir für die Zirkulation (3.3):

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3.5)$$

Wir betrachten nun eine geschlossene orientierte Kurve C , die die z -Achse umläuft. Es soll die Zirkulation des magnetischen Feldes (3.1) entlang von C berechnet werden. Betrachten wir C als Rand der Fläche F in der Ebene, so lässt sich der Satz von Stokes nicht anwenden, da F den singulären Punkt $x=y=0$ von $\vec{B}(\vec{r})$ in (3.1) enthält. Als Kurve ergänze man C durch C' , der einen Kreis mit Mittelpunkt auf der z -Achse darstellt und entgegengesetzt von C orientiert ist. Dann lässt sich $C+C'$ als Rand der Mantelfläche F' auffassen, die keinen Punkt auf der z -Achse enthält. Aufgrund des Satzes von Stokes (1.40) gilt deshalb mit (3.4):



$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \oint_{C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{C+C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{F'} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0 \quad (3.6)$$

Daraus folgt, dass die Zirkulation entlang von C gerade der Zirkulation entlang von $-C'$ entspricht:

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \oint_{C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{-C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (3.7)$$

Zur Berechnung der Zirkulation entlang von $-C'$ führen wir Zylinderkoordinaten ein:

$$\vec{r}(s, \varphi, z) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Mit den entsprechenden Einheitsvektoren

$$\vec{e}_s = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

erhalten wir für das Magnetfeld (3.1)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{s} \vec{e}_\varphi \quad (3.10)$$

Die Parametrisierung der Kurve $-C'$ lautet

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = R \vec{e}_\varphi d\varphi \quad (3.11)$$

Damit berechnen wir für die Zirkulation

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \vec{e}_\varphi R \vec{e}_\varphi = \mu_0 I \quad (3.12)$$

Demnach ist die Zirkulation der magnetischen Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$ entlang der Kurve C proportional zum Strom I , der durch eine Fläche F mit der Randkurve C fließt. Dieses Ergebnis lässt sich im Rahmen der Magnetostatik auf eine beliebige Stromverteilung verallgemeinern und wird als Ampèresgesetz bezeichnet.

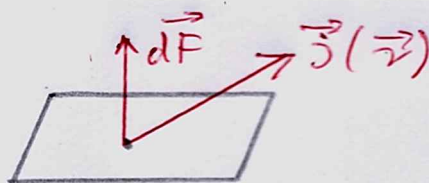
3.2 Erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

Aus dem Ampèreschen Grundgesetz der Magnetostatik (3.12) folgt einerseits mit dem Satz von Stokes

$$(1.40) \quad z = \int_F \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (3.13)$$

wobei F eine beliebige Fläche mit der Randkurve C ist. Andererseits lässt sich der Strom I durch F mit Hilfe der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ darstellen gemäß

$$I = \int_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (3.14)$$



Aus (3.12) - (3.14) folgt dann

$$\int_F \{ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) - \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \} \cdot d\vec{F} = 0 \quad (3.15)$$

Da diese Aussage für jede Fläche F gilt, erhalten wir hieraus die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik:

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (3.16)$$

Wir bemerken, dass (3.16) nicht für jede Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ sinnvoll ist. Berechnen wir die Rotorglieder der linken Seite von (3.16), so folgt aus (1.12) und (1.25):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial B_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial B_y(\vec{r})}{\partial z} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial B_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial B_z(\vec{r})}{\partial x} \right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial B_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial B_x(\vec{r})}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 B_x(\vec{r})}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 B_y(\vec{r})}{\partial z \partial y} \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{\partial^2 B_y(\vec{r})}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 B_x(\vec{r})}{\partial x \partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 B_z(\vec{r})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_y(\vec{r})}{\partial y \partial x} \right\} = 0 \quad (3.17)$$

da die gemischten zweiten partiellen Ableitungen für zwei mal stetig differenzierbare Funktionen nach dem Satz von Schwarz (2.27) verschwinden. Demnach folgt aus der Vergleichs der rechten Seite von (3.16) die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad (3.18)$$

In der Magnetostatik dürfen nur solche Stromdichten $\vec{j}(\vec{r})$ verwendet werden, die dieser Kontinuitätsgleichung genügen.

3.3 Zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

Wir kehren zum Biot-Savart-Gesetz (3.1) zurück und berechnen die Divergenz der magnetischen Feldstärke:

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ -y \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2+y^2} + x \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x^2+y^2} \right\} = 0 \quad (3.19)$$

Dieses Ergebnis läßt sich in der Magnetostatik auf ein beliebiges magnetisches Feld verallgemeinern und stellt die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik dar. Sie besagt, dass es für das Magnetfeld keine magnetischen Monopole gibt. Man kann (3.19) auch in Integralform angeben. Hierzu integriert man $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r})$ über ein Volumen V und wendet den Satz von Gauß (1.31) an:

$$\oint_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0 \quad (3.20)$$

Demnach verschwindet der Fluss der magnetischen Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$ durch jede geschlossene Fläche F . Es zeigen im Mittel gleich viele magnetische Feldlinien in F hinein und aus F heraus.

3.4 Vektorpotential:

Da die Divergenz der magnetischen Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$ gemäß (3.19) verschwindet, läßt sich wegen (3.17) ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ mit der Eigenschaft

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \quad (3.21)$$

einführen. Allerdings ist zu beachten, dass dieses Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ nicht eindeutig ist. Zu einem $\vec{A}(\vec{r})$ kann immer das Gradientenfeld $\text{grad } \lambda(\vec{r})$ eines beliebigen Skalarfeldes $\lambda(\vec{r})$ addiert werden, ohne dass sich die magnetische Feldstärke verändert. In der Tat führt die Eichtransformation

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad } \lambda(\vec{r}) \quad (3.22)$$

wegen der Identität (2.26) der Vektoranalysis auf das Ergebnis

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}'(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.23)$$

sie Eichtransformation (3.22) verwenden wir nun, um das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ für eine beliebig Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ zu berechnen.

3.5 Berechnung des Vektorpotentials:

Wir setzen nun (3.21) in die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik (3.16) ein. Hierbei ist eine weitere Identität der Vektoranalysis zu beachten, die sich aus (1.8), (1.12), (1.24), (2.29) und der "BAC-CAB"-Regel für das doppelte Vektorprodukt (1.20) ergibt:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{A}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] = \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})] - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \text{grad div } \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Damit erhalten wir als Feldgleichung für das Vektorpotential:

$$\text{grad div } \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (3.25)$$

Wir nutzen nun die Eichfreiheit (3.22) im Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ aus und wählen speziell die Coulomb-Eichung

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad (3.26)$$

Sodurch vereinfacht sich die Feldgleichung (3.25) zu

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (3.27)$$

Hierbei handelt es sich für jede einzelne Komponente des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ um eine Poisson-Gleichung (2.28). Deshalb können wir unmittelbar die Lösung (2.48), (2.49) der Poisson-Gleichung (2.28) über-

nehmen und erhalten als Lösung von (3.27)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.28)$$

Wir überprüfen nun, ob (3.28) tatsächlich der Coulomb-Gleichung (3.26) genügt. Zunächst erhalten wir

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.29)$$

Eine partielle Integration mit Hilfe des Satzes von Gauß (1.31) führt dann auf

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.30)$$

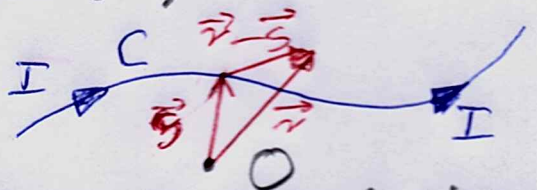
Demnach führt die Kontinuitätsgleichung (3.18) der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ auf die Coulomb-Gleichung (3.26) des Vektorpotentials (3.28). Mit Hilfe von (3.21) und (3.28) läßt sich die magnetische Feldstärke der Magnetostatik berechnen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (3.31)$$

Demnach sind Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ und magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$ einer beliebigen Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ durch (3.28) und (3.31) definiert. Damit lassen sich alle Phänomene der Magnetostatik beschreiben.

Wir betrachten als Beispiel einen Strom I , der durch einen Draht mit der Kurvenform C fließt. In diesem Fall lautet die Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \oint_C \delta(\vec{r} - \vec{s}) d\vec{s} \quad (3.32)$$



Zunächst ist zu prüfen, ob diese Stromdichte der Kontinuitätsgleichung (3.18) genügt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) &= -I \oint_C \vec{\nabla}_s \delta(\vec{r} - \vec{s}) \cdot d\vec{s} \stackrel{(1.1)}{=} -I \oint_C d\delta(\vec{r} - \vec{s}) \\ &= -I \{ \delta(\vec{r} - \vec{s}_A) - \delta(\vec{r} - \vec{s}_E) \} \end{aligned} \quad (3.33)$$

hierbei bezeichnen \vec{s}_A und \vec{s}_E Anfangs- und Endpunkt des Drahtes. Wenn der Draht C geschlossen ist, gilt $\vec{s}_A = \vec{s}_E$ und aus (3.33) folgt die Konti-

nutzt Gleichung (3.18). Setzen wir die Stromdichte (3.32) in (3.31) ein, so erhalten wir das allgemeine Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \quad (3.34)$$

Wir spezialisieren nun weiter auf einen unendlich langen Draht, der parallel zur z -Achse verläuft. Mit der Parametrisierung von C

$$\vec{s}(z') = z' \vec{e}_z, \quad z' \in (-\infty, +\infty) \quad (3.35)$$

reduziert sich (3.34) auf das Integral

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{1}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Es lässt sich mit Hilfe der Stammfunktion

$$\int z' dz' \frac{1}{(z'^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{z'}{(z'^2 + a^2)^{1/2}} \quad (3.37)$$

berechnen und wir erhalten aus (3.36) das zu Beginn angegebene Biot-Savart-Gesetz (3.1) für einen stromdurchflossenen Geraden Draht.