4. Maxwell-Gleichungen:

In Kapitel 2 und 3 wurde behandelt, welche elektrischen und magnetischen Felder bei einer statischen Ladungs- und Stromdichte auftreten. Nun verallgemeinern wir diese Resultate auf zeitlich veränderliche Ladungs- und Stromdichten und die entsprechenden elektrischen und magnetischen Felder. Ausgangspunkt hierfür sind die phänomenologischen Gesetze der Elektrodynamik, die Michael Faraday zusammenstellte. Darauf aufbauend formulierte James Clerk Maxwell 1864 die Grundgleichungen der Elektrodynamik, die heutzutage als Maxwell-Gleichungen bekannt sind.

4.1 Helmholtzscher Vektorzerlegungssatz:

Zunächst diskutieren wir die mathematischen Grundlagen der Maxwell-Gleichungen, die durch den Helmholtzschen Vektorzerlegungssatz gegeben sind.

4.1.1 Motivation:

In Kapitel 2 und 3 hatten wir festgehalten, dass die Elektrostatik und die Magnetostatik durch die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ und die magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$ charakterisiert werden. Dabei werden die beiden Felder $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ im Rahmen der Maxwell-Gleichungen dadurch beschrieben, dass gemäß (2.16), (2.23) und (3.16), (3.19) deren Divergenz und deren Rotation angegeben werden. Diesen Sachverhalt wollen wir nun auf ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ verallgemeinern. Wir nehmen also an, dass die Divergenz und die Rotation dieses Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r})$ gemäß

$$\operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \tag{4.1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}) \tag{4.2}$$

gegeben sind und fragen uns, ob wir daraus das Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ eindeutig rekonstruieren können. Dabei nehmen wir an, dass sowohl $\vec{V}(\vec{r})$ als auch $f(\vec{r})$ und $\vec{g}(\vec{r})$ für $|\vec{r}| \to \infty$ hinreichend stark abfallen.

4.1.2 Herleitung:

Zunächst gehen wir von den Eigenschaften (2.31), (2.32) der Diracschen Deltafunktion aus und erhalten

$$\vec{V}(\vec{r}) = \int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\vec{V}(\vec{r}\,')\,dV' \qquad (4.3)$$

Mit Hilfe der Distributionenidentität (2.36) folgt

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi}\int \vec{V}(\vec{r}\,')\,\Delta' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \qquad (4.4)$$

Eine zweimalige partielle Integration analog zu Abschnitt 2.8 führt dann (4.4) über in

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\Delta'\,\vec{V}(\vec{r}\,')\,dV' \qquad (4.5)$$

Aufgrund der Identität (3.24) erhalten wir

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left\{\mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}'\,\vec{V}(\vec{r}\,') - \mathrm{grad}'\,\mathrm{div}'\,\vec{V}(\vec{r}\,')\right\}dV' \qquad (4.6)$$

Es wird nun in beiden Termen durch eine partielle Integration der äußere Nabla-Operator von $\vec{V}(\vec{r}\,')$ auf die Funktion $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ umgewälzt. Im ersten Term führt dies mit (4.2) auf

$$\vec{V}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\vec{\nabla}'\times\vec{g}(\vec{r}\,')\,dV' = \frac{-1}{4\pi}\int\left[\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\times\vec{g}(\vec{r}\,')\,dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\left[\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\times\vec{g}(\vec{r}\,')\,dV' = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int\frac{\vec{g}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \qquad (4.7)$$

wobei die partielle Integration mit Hilfe von (1.46a) durchgeführt wurde. Im zweiten Term folgt entsprechend mit (4.1)

$$\vec{V}_2(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi}\int\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\vec{\nabla}'f(\vec{r}\,')\,dV' = \frac{1}{4\pi}\int\left[\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]f(\vec{r}\,')\,dV'$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\int\left[\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]f(\vec{r}\,')\,dV' = \frac{-1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int\frac{f(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \qquad (4.8)$$

wobei die partielle Integration mit Hilfe von (1.33) durchgeführt wurde. Bei beiden Rechnungen treten jeweils zwei Minuszeichen auf. Eines stammt von der partiellen Integration und das andere von $\vec{\nabla}\,1/|\vec{r}-\vec{r}\,'| = -\vec{\nabla}'\,1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$.
Insgesamt erhalten wir aus (4.6)–(4.8) den Helmholtzschen Vektorzerlegungssatz:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int\frac{\vec{g}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int\frac{f(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \qquad (4.9)$$

Er besagt, dass man aus der Kenntnis von Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r})$ wie in (4.1) und (4.2) das gesamte Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ gemäß (4.9) eindeutig rekonstruieren kann. Das bedeutet, dass jedes Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ durch seine Quellen $\mathrm{div}\,\vec{V}(\vec{r})$ und seine Wirbel $\mathrm{rot}\,\vec{V}(\vec{r})$ eindeutig festgelegt ist. Demnach ist der Helmholtzsche Vektorzerlegungssatz (4.9) die mathematische Grundlage für die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik. Sie charakterisieren nämlich die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ und die magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$ durch die Angabe deren Quellen und Wirbel. Im Rahmen der Elektrostatik sind dies die Maxwell-Gleichungen (2.16), (2.23), während die Magnetostatik durch die Maxwell-Gleichungen (3.16), (3.19) festgelegt ist.

4.1.3 Spezialfälle:

Zum Schluß dieses Abschnitts betrachten wir noch zwei wichtige Spezialfälle des Helmholtzschen Vektorzerlegungssatzes:

1) Verschwindet die Rotation des Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r})$, so läßt sich $\vec{V}(\vec{r})$ gemäß (4.9) als Gradient eines Skalarfeldes darstellen:

$$\text{rot}\,\vec{V}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\varphi(\vec{r}),\quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{div}'\,\vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \quad (4.10)$$

Diese Situation tritt in der Elektrostatik aufgrund von (2.23) auf. Dabei geht (4.10) aufgrund von (2.16) in (2.48), (2.49) über.

2) Verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r})$, so läßt sich $\vec{V}(\vec{r})$ gemäß (4.9) als Rotation eines Vektorfeldes darstellen:

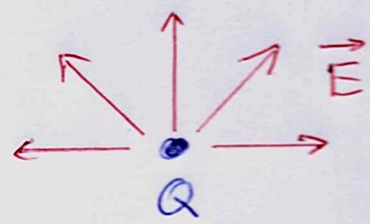
$$\text{div}\,\vec{V}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{V}(\vec{r}) = \text{rot}\,\vec{A}(\vec{r}),\quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{rot}'\,\vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \quad (4.11)$$

Diese Situation tritt in der Magnetostatik aufgrund von (3.19) auf. Dabei geht (4.11) aufgrund von (3.16) in (3.28) über.

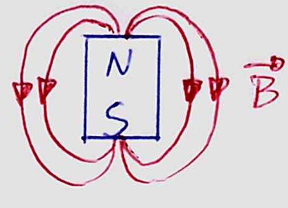
4.2 Phänomenologie:

Aus unzähligen Experimenten konnten die folgenden phänomenologischen Gesetze der Elektrodynamik extrahiert werden:

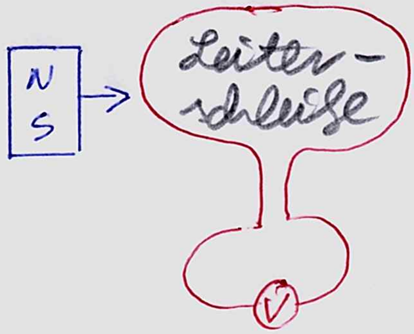
(M1) Coulomb-Gesetz:
Elektrische Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.



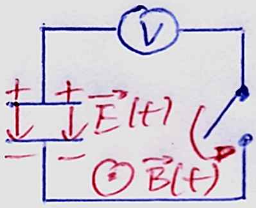
(M2) Es gibt keine magnetischen Ladungen, d. h. magnetische Feldlinien sind immer geschlossen.



(M3) Induktionsgesetz:
Die zeitliche Änderung eines magnetischen Flusses induziert ein elektrisches Feld, das seiner Ursache entgegenwirkt (Lenz-Regel).



(M4) Ein elektrischer Strom (Ampère-Gesetz) oder ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld (Maxwellscher Verschiebungsstrom) induzieren ein Magnetfeld.



Diese phänomenologischen Gesetze der Elektrodynamik lassen sich in Form der Maxwell-Gleichungen mathematisch formulieren. Es handelt sich dabei um partielle Differentialgleichungen, die die ersten partiellen Ableitungen von $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ nach den Koordinaten $\vec{r}$ und der Zeit t beinhalten.

4.3 Mathematische Formulierung:

Bewegte elektrische Ladungen in Form von zeitlich veränderlichen Ladungs- und Stromdichten erzeugen im Raum einen "Erregungszustand", der durch die beiden Vektorfelder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ an jedem Ort $\vec{r}$ zu jedem Zeitpunkt t beschrieben wird. Umgekehrt üben auch die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ eine Kraftwirkung auf bewegte elektrische Ladungen aus, die durch die Lorentzkraft beschrieben wird. Eine vollständige Beschreibung der Elektrodynamik umfasst daher die vier

Maxwell-Gleichungen sowie eine Formel für die Lorentz-Kraft.

Bei der Behandlung des Helmholtzschen Vektorzerlegungssatzes in Abschnitt 4.1 haben wir gesehen, dass ein Vektorfeld durch dessen Divergenz, also seine Quelldichte, und dessen Rotation, also seine Wirbeldichte, eindeutig bestimmt ist. Deshalb geben die vier Maxwell-Gleichungen die Quell- und Wirbeldichten für die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ an:

$$\text{(M1)} \quad \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \tag{4.12}$$

$$\text{(M2)} \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{4.13}$$

$$\text{(M3)} \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{4.14}$$

$$\text{(M4)} \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{4.15}$$

Hierbei tritt neben der Dielektrizitätskonstanten im Vakuum ε_0 aus (2.2) und der Permeabilitätskonstanten μ_0 aus (3.2) noch die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = 2{,}9979 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s} \tag{4.16}$$

auf. Zwischen diesen drei Naturkonstanten besteht die Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{4.17}$$

Zu den vier Maxwell-Gleichungen kommt noch eine Formel für die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{4.18}$$

bzw. die Lorentz-Kraftdichte

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{j}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t) \tag{4.19}$$

hinzu.

4.4 Elektrostatik und Magnetostatik:

Als Spezialfall betrachten wir ein elektromagnetisches Feld, das zeitunabhängig ist:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r}) \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r}) \qquad (4.21)$$

Hierzu müssen aber auch Ladungs- und Stromdichten zeitunabhängig sein:

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r}) \qquad (4.22)$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r}) \qquad (4.23)$$

In diesem Fall reduzieren sich die vier Maxwell-Gleichungen (4.12) – 14.15) auf diejenigen der Elektrostatik (2.16), (2.23) und der Magnetostatik (3.16), (3.19).

Im folgenden untersuchen wir, welche Auswirkungen eine explizite Zeitabhängigkeit der elektromagnetischen Felder hat. Eine dieser Konsequenzen ist es, dass sich das elektromagnetische Feld in Form von Wellen ausbreiten kann.