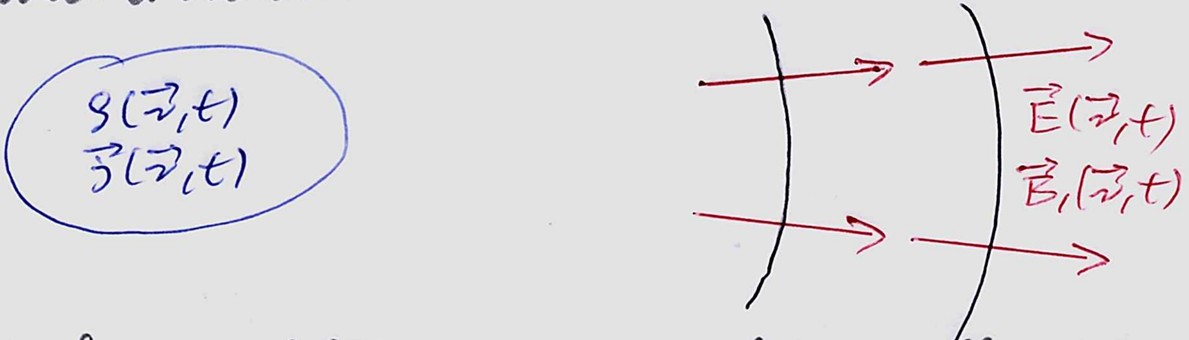
5. Elektromagnetische Wellen im Vakuum:

In diesem Kapitel untersuchen wir elektromagnetische Wellen im Vakuum, die von bewegten Ladungen ausgesandt werden:



Die Entdeckung elektromagnetischer Wellen ist ein Musterbeispiel für das Zusammenwirken von Experiment, Theorie und Technik:

- Michael Faraday formulierte 1832 die Hypothese, dass sich elektrische und magnetische Felder wie Wellen ausbreiten.
- James Clerk Maxwell entwickelte 1864 eine Theorie, wonach Licht eine elektromagnetische Welle darstellt, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit (4.16) ausbreitet.
- Heinrich Hertz führte 1886, d.h. sieben Jahre nach Maxwell's Tod, in Karlsruhe ein Experiment durch, das die Abstrahlung und den Empfang hochfrequenter elektromagnetischer Wellen demonstrierte.

5.1 Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

Wir verlassen nun die Statik und untersuchen zeitabhängige Felder. Dabei wollen wir die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ in einem großen Abstand von deren felderzeugenden Quellen und Wirbeln betrachten. Das bedeutet, dass wir solche Raumpunkte $\vec{r}$ betrachten, bei denen keine Ladungen und keine Ströme vorliegen:

$$\rho(\vec{r},t) = 0 \,, \qquad \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{0} \qquad (5.1)$$

Einsetzen von (5.1) in (4.12) – (4.15) führt auf die Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\text{(M1)} \qquad \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r},t) = 0 \qquad (5.2)$$

$$\text{(M2)} \qquad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad (5.3)$$

(M3) $\quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$ (5.4)

(M4) $\quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$ (5.5)

Eine offensichtliche Lösung dieser gekoppelten partiellen Differentialgleichungen ist die triviale Lösung $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{0}$. Im folgenden untersuchen wir, ob es auch nichttriviale Lösungen von (5.2)–(5.5) gibt.

5.2 Herleitung der Wellengleichung:

Hierzu verfolgen wir die Strategie, die gekoppelten Maxwell-Gleichungen (5.2)–(5.5) zu entkoppeln. Wir streben also an, jeweils eine einzelne Bewegungsgleichung für $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ abzuleiten. Hierzu differenzieren wir (5.5) nach der Zeit t und erhalten

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r},t) \qquad (5.6)$$

Nach dem Satz von Schwarz können bei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen die gemischten partiellen Ableitungen nach der Zeit und den Raumkoordinaten auf der rechten Seite von (5.6) vertauscht werden:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \qquad (5.7)$$

Einsetzen von (5.4) in (5.7) führt dann auf

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},t) \qquad (5.8)$$

Aufgrund der vektoranalytischen Identität (3.24) geht (5.8) über in

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}(\vec{r},t) + \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0} \qquad (5.9)$$

Unter Beachtung von (5.2) reduziert sich (5.9) auf die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0} \qquad (5.10)$$

Sie besagt, dass jede einzelne Komponente von $\vec{E}(\vec{r},t)$ Lösung der Wellengleichung ist. Eine entsprechende Rechnung zeigt, dass auch die magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r},t)$ der Wellengleichung genügt:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t^2} \underset{(5.4)}{=} -\frac{1}{c^2}\operatorname{rot}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \underset{(5.5)}{=} -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t)$$

$$\overset{(3.24)}{=} \Delta \vec{B}(\vec{r},t) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) \overset{(5.3)}{=} \Delta \vec{B}(\vec{r},t) \tag{5.11}$$

Wir werden nun zeigen, dass die Lösungen von (5.10) und (5.11) elektromagnetische Wellen beschreiben. Die theoretische Vorhersage elektromagnetischer Wellen durch Maxwell zählt zu den großen Leistungen der modernen Physik. Sie ist die Grundlage der heutigen Kommunikationstechnik (Fernsehen, Radio, Satellitenempfang, usw.). Da Licht eine elektromagnetische Welle darstellt, die sich durch das Vakuum ausbreitet, ist die Existenz elektromagnetischer Wellen auch dafür verantwortlich, dass wir Sterne sehen können.

5.3 Ausbreitung in x-Richtung:

Zunächst behandeln wir den Spezialfall, dass wir uns auf solche Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ beschränken, die nur von der x-Koordinate und der Zeit abhängen. Dies bedeutet, dass wir eine elektromagnetische Welle betrachten, die sich in x-Richtung ausbreitet:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,t), \qquad \vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}(x,t) \tag{5.12}$$

Einsetzen von (5.12) in (5.2), (5.3) führt dann auf

$$\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial B_x(x,t)}{\partial x} \tag{5.13}$$

Als Lösung von (5.13) wählen wir

$$E_x(x,t) = 0 = B_x(x,t) \tag{5.14}$$

Das bedeutet, dass sowohl $\vec{E}(\vec{r},t)$ als auch $\vec{B}(\vec{r},t)$ in der yz-Ebene liegen und damit senkrecht zur Ausbreitung in x-Richtung sind. Diese Eigenschaft elektromagnetischer Wellen bezeichnet man als Transversalität. Es gilt somit:

$$\vec{E}(x,t) = E_y(x,t)\,\vec{e}_y + E_z(x,t)\,\vec{e}_z \tag{5.15}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_y(x,t)\,\vec{e}_y + B_z(x,t)\,\vec{e}_z \tag{5.16}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir eine elektrische Feldstärke, die linear in y-Richtung polarisiert ist:

$$\vec{E}(x,t) = E_y(x,t)\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

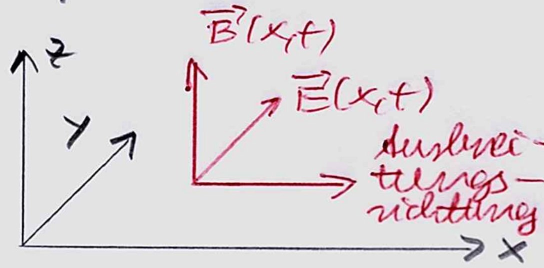
Einsetzen von (5.17) in (5.4) führt auf

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(x,t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y(x,t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial B_y(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} \end{pmatrix} \qquad (5.18)$$

Wenn also $\vec{E}(x,t)$ gemäß (5.17) in y-Richtung zeigt, dann muss $\vec{B}(x,t)$ gemäß (5.18) in z-Richtung zeigen:

$$\vec{B}(x,t) = B_z(x,t)\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x,t) \end{pmatrix} \qquad (5.19)$$

Damit steht auch das magnetische Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und ist damit also auch transversal. Es steht aber auch senkrecht zum elektrischen Feld.



Mit diesen Überlegungen haben wir unser ursprüngliches Problem, die Wellengleichungen (5.10), (5.11) für die sechs Komponenten $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ zu lösen, im Falle einer Ausbreitung in x-Richtung auf eine eindimensionale Wellengleichung reduziert:

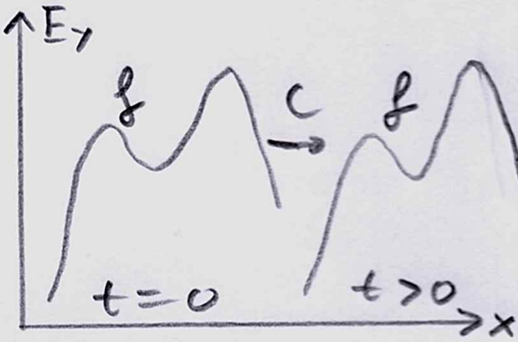
$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.20)$$

5.4 Allgemeine Lösung der Wellengleichung:

Wir zeigen nun, dass der Ansatz

$$E_y(x,t) = f(x-ct) \qquad (5.21)$$

mit einer beliebigen Funktion f die eindimensionale Wellengleichung (5.20) löst. Hierzu betrachten wir als Nebenrechnung:



$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = f'(x-ct), \qquad \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = f''(x-ct) \qquad (5.22)$$

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} = -c\cdot f'(x-ct), \qquad \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = c^2 f''(x-ct) \qquad (5.23)$$

In der Tat führt das Einsetzen von (5.22), (5.23) in (5.20) auf die Identität

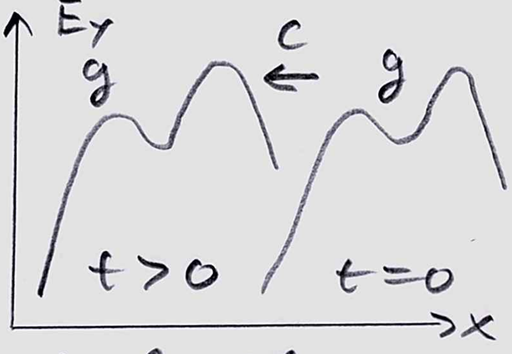
$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = f''(x-ct) - \frac{1}{c^2}c^2 f''(x-ct) = 0 \;\checkmark$$

Ganz entsprechend zeigt man, dass auch

$$E_y(x,t) = g(x+ct) \qquad (5.24)$$

mit einer beliebigen Funktion g die eindimensionale Wellengleichung (5.20) löst.

Dabei beschreibt (5.21) die Propagation eines Wellenmusters f in x-Richtung, während (5.24) die Propagation eines Wellenmusters entgegen der x-Richtung darstellt. Dabei erfolgt in beiden Fällen die Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit c.



Licht hat damit die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit und die gleichen Eigenschaften wie elektromagnetische Wellen. Wir können also festhalten, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist:

Licht $\xleftrightarrow[\text{Gleichungen}]{\text{Maxwell-}}$ elektromagnetische Welle

Sehen, Farben, Regenbogen — bewegte Ladungen, Ströme, Kompassnadeln

Abschließend stellen wir fest, dass die eindimensionale Wellengleichung (5.20) linear ist. Dies bedeutet, dass deren allgemeine Lösung eine Überlagerung (Superposition) der Lösungen (5.21) und (5.24) ist:

$$E_y(x,t) = f(x-ct) + g(x-ct) \qquad (5.25)$$

Es gibt demnach auch elektromagnetische Wellen, die sich gleichzeitig in und entgegen der x-Richtung ausbreiten. Hierfür ist eine stehende elektromagnetische Welle ein konkretes Beispiel.

5.5 Monochromatische ebene Welle:

Wir verallgemeinern nun die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts auf die dreidimensionale Wellengleichung. Nach (5.10) und (5.11) lautet sie:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \qquad (5.26)$$

wobei die Funktion $\psi(\vec{r},t)$ mit den sechs Komponenten des elektromagnetischen Feldes $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ identifiziert werden kann.

5.5.1 Lösungsansatz:

Zur Lösung von (5.26) verwenden wir den Ansatz einer monochromatischen ebenen Welle:

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tag{5.27}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{k}$ den Wellenvektor, ω die Kreisfrequenz und Ψ_0 eine möglicherweise komplexe Amplitude. Wie muß man aber interpretieren, dass unser Ansatz (5.27) komplex ist? Physikalisch von Bedeutung sind nur die reellen Lösungen, also $\mathrm{Re}\,\Psi(\vec{r},t)$ und $\mathrm{Im}\,\Psi(\vec{r},t)$. Mathematisch bequemer ist aber die komplexe Schreibweise. Daher rechnen wir zunächst komplex, am Ende können wir immer zum Real- oder Imaginärteil übergehen, falls das erforderlich ist.

Wir prüfen nun, ob (5.27) tatsächlich eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung (5.26) ist. Hierzu berechnen wir zunächst die einzelnen partiellen Ableitungen:

$$\vec{\nabla}\Psi(\vec{r},t) = i\vec{k}\,\Psi(\vec{r},t), \qquad \Delta\Psi(\vec{r},t) = -\vec{k}^2\,\Psi(\vec{r},t) \tag{5.28}$$

$$\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -i\omega\,\Psi(\vec{r},t), \qquad \frac{\partial^2\Psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2\,\Psi(\vec{r},t) \tag{5.29}$$

Einsetzen von (5.27) in (5.26) führt demnach auf

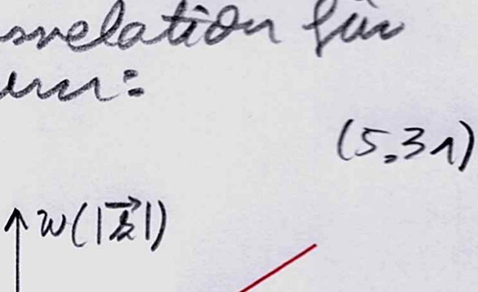
$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\Psi(\vec{r},t) = 0 \tag{5.30}$$

5.5.2 Dispersionsrelation:

Da unsere Lösung $\Psi(\vec{r},t)$ in (5.27) von Null verschieden ist, folgt aus (5.30) die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen im Vakuum:

$$\omega(\vec{k}) = \overset{+}{(-)}\; c\,|\vec{k}| \tag{5.31}$$

Dabei bezeichnet eine Dispersionsrelation den Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor $\vec{k}$ und der Kreisfrequenz ω einer Welle. Nach (5.31) ist die Dispersionsrelation linear.



Bei der Zerlegung

$$\vec{k} = k\,\hat{\vec{k}} \qquad (5.32)$$

gibt der Einheitsvektor $\hat{\vec{k}}$ die Richtung an, in der sich die Welle ausbreitet, während der Betrag $k = |\vec{k}|$ mit der Wellenlänge λ verknüpft ist:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (5.33)$$

Entsprechend hängen Kreisfrequenz ω und Periodendauer T zusammen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (5.34)$$

wobei die Frequenz ν der Welle durch

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (5.35)$$

gegeben ist. Wir können demnach die lineare Dispersionsrelation (5.31) auch folgendermaßen umschreiben:

$$\omega = c\,k \iff \lambda = c \cdot T \iff \lambda \nu = c \qquad (5.36)$$

Außerdem bemerken wir, dass elektromagnetische Wellen wie Licht in Materie im allgemeinen eine nichtlineare Dispersionsrelation besitzen. Sie führt beispielsweise auf die Farbaufspaltung im Prisma.

5.5.3 Phase:

Da unsere Lösung (5.27) eine komplexe Größe darstellt, können wir sie in Betrag und Phase zerlegen. Mit einer entsprechenden Zerlegung für die Amplitude

$$\psi_0 = |\psi_0|\, e^{i\phi_0} \qquad (5.37)$$

erhalten wir aus (5.27)

$$\psi(\vec{r},t) = |\psi_0|\, e^{i\phi(\vec{r},t)} \qquad (5.38)$$

wobei die Phase der elektromagnetischen Welle gegeben ist durch

$$\phi(\vec{r},t) = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_0 \qquad (5.39)$$

Mit Hilfe von (5.32) – (5.35) läßt sich die Phase umformen zu

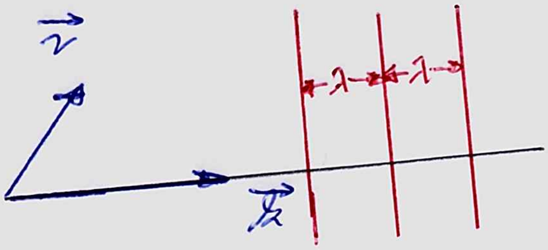
$$\phi(\vec{r},t) = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda}\hat{\vec{k}}\cdot\vec{r} - \frac{1}{T}t\right) + \phi_0 \qquad (5.40)$$

Das bedeutet, dass die elektromagnetische Welle

(5.38), (5.40) sowohl zeitlich als auch räumlich periodisch ist

$$\psi(\vec{r} + n\lambda\hat{k}, t) = \psi(\vec{r}, t + mT) = \psi(\vec{r}, t); \; n, m \in \mathbb{Z} \qquad (5.41)$$

Bei einer Momentaufnahme, wo wir t festhalten, erhalten wir Ebenen konstanter Phase im Abstand der Wellenlänge λ.



Außerdem lesen wir anhand der Phase

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}\left(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct\right) \qquad (5.42)$$

ab, dass sich die elektromagnetische Welle mit der Phasengeschwindigkeit c im Vakuum ausbreitet.

5.5.4 Elektromagnetische Felder:

Wir fassen nun die einzelnen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ wieder zusammen und erhalten für eine ebene elektromagnetische Welle:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{ \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \qquad (5.43)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{ \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \qquad (5.44)$$

Dabei bezeichnen $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ orts- und zeitenunabhängige Amplitudenvektoren, die im allgemeinen komplex sind. Wir beachten nun, dass nicht jeder Lösung (5.43), (5.44) der dreidimensionalen Wellengleichungen (5.10), (5.11) auch eine Lösung der Maxwell-Gleichungen (5.2)–(5.5) ist. Beispielsweise führen die Maxwell-Gleichungen (5.2), (5.3) bei (5.43), (5.44) zu den zusätzlichen Bedingungen

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \qquad (5.45)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \qquad (5.46)$$

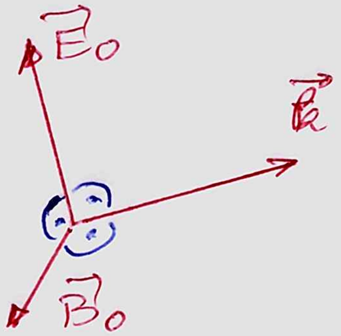
Das bedeutet, dass die Amplitudenvektoren $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ senkrecht auf dem Wellenvektor stehen

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \qquad (5.47)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \qquad (5.48)$$

d.h. es liegen transversale Wellen vor.

Entsprechend führen die Maxwell-Gleichungen (5.4), (5.5) bei (5.43), (5.44) auf die zusätzlichen Bedingungen



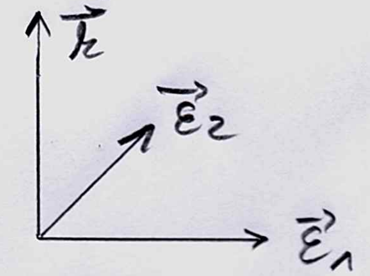
$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = c k \vec{B}_0 \qquad (5.49)$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{k}{c} \vec{E}_0 \qquad (5.50)$$

Demnach bilden $\vec{k}_0$, $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ ein Rechtssystem.

5.5.5 Polarisation:

Unter der Polarisation versteht man die Eigenschaft einer elektromagnetischen Welle, wie dessen Vektorfeld relativ zum Wellenvektor $\vec{k}$ gerichtet ist. Aufgrund der Transversalitätsbedingung (5.47) liegt der Amplitudenvektor $\vec{E}_0$ in der Ebene senkrecht zu $\vec{k}$. Damit ist aber die Polarisation einer ebenen monochromatischen Welle nur teilweise festgelegt. Wir führen nun zwei reelle Einheitsvektoren $\vec{\varepsilon}_1$ und $\vec{\varepsilon}_2$ ein, die diese Ebene aufspannen. Dabei sollen die folgenden Beziehungen gelten:



$$|\vec{\varepsilon}_1| = |\vec{\varepsilon}_2| = |\hat{k}| = 0 \qquad (5.51)$$

$$\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\varepsilon}_1 \cdot \hat{k} = \vec{\varepsilon}_2 \cdot \hat{k} = 0 \qquad (5.52)$$

d.h. $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ und $\hat{k}$ bilden ein Dreibein. Dann können wir den Amplitudenvektor $\vec{E}_0$ nach den Einheitsvektoren $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ zerlegen:

$$\vec{E}_0 = E_1 \vec{\varepsilon}_1 + E_2 \vec{\varepsilon}_2 \qquad (5.53)$$

Dabei sind mit $\vec{E}_0$ auch die Projektionen

$$E_1 = \vec{E}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_1, \qquad E_2 = \vec{E}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_2 \qquad (5.54)$$

im allgemeinen komplex und lassen sich deshalb in Betrag und Phase zerlegen:

$$E_1 = E_{01} e^{i\phi_1}, \qquad E_2 = E_{02} e^{i\phi_2} \qquad (5.55)$$

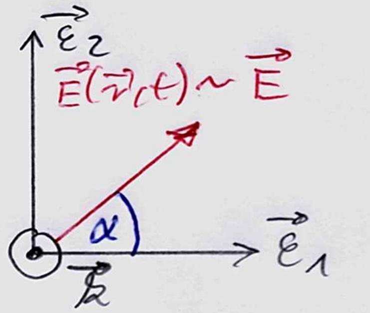
Einsetzen von (5.53), (5.55) in (5.43) führt dann auf

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{01} \vec{\varepsilon}_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_1) + E_{02} \vec{\varepsilon}_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_2) \qquad (5.56)$$

die physikalische Bedeutung der Amplituden E_{01}, E_{02} und der Phasen ϕ_1, ϕ_2 besteht darin, dass sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r},t)$ in der $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$-Ebene und damit die Polarisation der elektromagnetischen Welle beschreiben. Wir untersuchen nun verschiedene Fälle, die sich bezüglich der relativen Phase

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \qquad (5.57)$$

unterscheiden.



1. Fall: $\Delta\phi = 0$ oder $\Delta\phi = \pm\pi$

Wir erhalten in diesem Fall offenbar

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_1) \qquad (5.58)$$

wobei der Polarisationsvektor

$$\vec{E} = E_{01}\,\vec{\varepsilon}_1 \pm E_{02}\,\vec{\varepsilon}_2 \qquad (5.59)$$

orts- und zeitunabhängig ist. Er ist um den Winkel α gegenüber der x-Achse geneigt:

$$\tan\alpha = \pm\frac{E_{02}}{E_{01}} \qquad (5.60)$$

Man spricht dann von einer linear polarisierten ebenen Welle. Offenbar beschreibt (5.56) eine Überlagerung zweier linear polarisierten ebenen Wellen.

2. Fall: $\Delta\phi = \pm\pi/2$ und $E_{01} = E_{02} = E$

In diesem Fall gilt

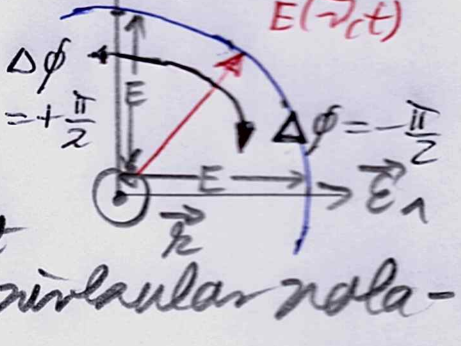
$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_1(\vec{r},t)\,\vec{\varepsilon}_1 + E_2(\vec{r},t)\,\vec{\varepsilon}_2 \qquad (5.61)$$

wobei die Komponenten der elektrischen Feldstärke

$$E_1(\vec{r},t) = E\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_1)\,,\quad E_2(\vec{r},t) = \mp E\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_1) \qquad (5.62)$$

auf einem Kreis mit Radius E liegen:

$$E_1(\vec{r},t)^2 + E_2(\vec{r},t)^2 = E^2 \qquad (5.63)$$



Je nach Vorzeichen der relative Phase $\Delta\phi = \pm\pi/2$ wird der Kreis links oder rechts herum durchlaufen. Man spricht deshalb von einer links bzw. rechts zirkular polarisierten ebenen Welle.

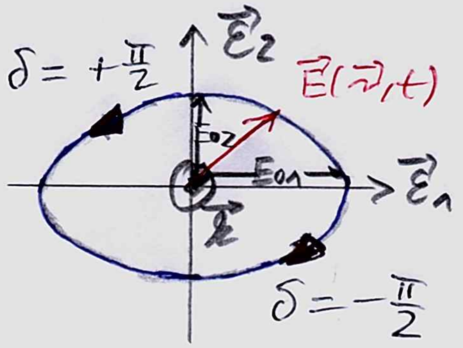
3. Fall: $\Delta\phi = \pm\pi/2$ und $E_{01} \neq E_{02}$

Nun gilt wieder (5.61), wobei aber die Komponenten

$$E_1(\vec{r},t) = E_{01}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_1),\quad E_2(\vec{r},t) = \mp E_{02}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_1) \quad (5.64)$$

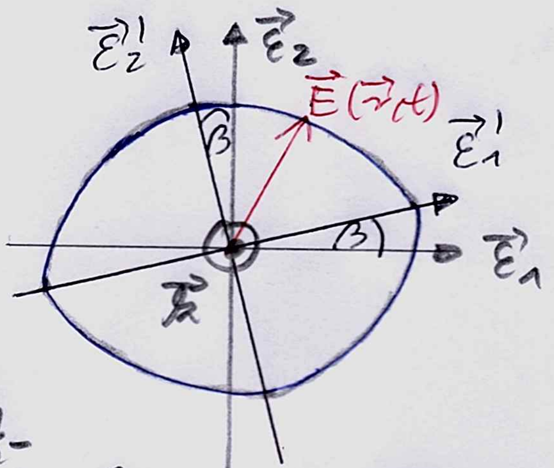
der Ellipsengleichung

$$\left(\frac{E_1(\vec{r},t)}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_2(\vec{r},t)}{E_{02}}\right)^2 = 1 \quad (5.65)$$



genügen. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r},t)$ durchläuft demnach in der $\vec{\varepsilon}_1$-$\vec{\varepsilon}_2$-Ebene eine Ellipse und man spricht von einer links bzw. rechts elliptisch polarisierten ebenen Welle.

4. Fall: $\Delta\phi$ beliebig und $E_{01} \neq E_{02}$:

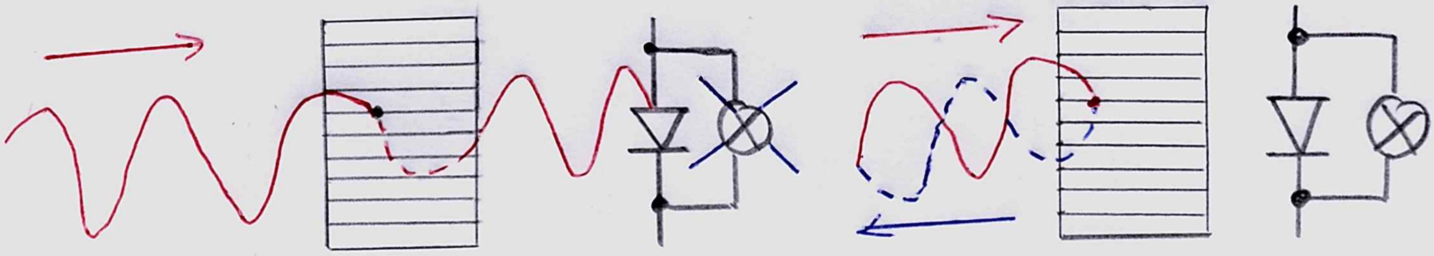


In diesem allgemeinst möglichen Fall durchläuft die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r},t)$ in der $\vec{\varepsilon}_1$-$\vec{\varepsilon}_2$-Ebene wieder eine Ellipse. Sie besitzt aber nun zwei Halbachsen in Richtung von $\vec{\varepsilon}_1{}'$, $\vec{\varepsilon}_2{}'$, die gegenüber den ursprünglichen Vektoren $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ um den Winkel β gedreht sind. Hierbei hängt β sowohl von der relativen Phase $\Delta\phi$ als auch von den Amplituden ab.

Wir bemerken, dass das Licht einer normalen Glühlampe unpolarisiert ist, da es sich aus vielen verschiedenen elektromagnetischen Wellen mit unterschiedlichen Polarisationen zusammensetzt. Demgegenüber erhält man mit einem Laser eine ebene monochromatische elektromagnetische Welle mit fester Polarisation.

Zum experimentellen Nachweis der Polarisation betrachten wir Mikrowellen. Dabei handelt es sich um elektromagnetische Wellen mit Frequenzen im GHz-Bereich und Wellenlängen im cm-Bereich. Wir lassen die Mikrowellen auf Metallstäbe auftreffen. Ist die Polarisation der Mikrowelle senkrecht zu den

Metallstäben, so tritt sie durch die Metallstäbe hindurch. Ist dagegen die Mikrowelle parallel zu den Metallstäben polarisiert, so werden die Elektronen in den Metallstäben zu Schwingungen angeregt. Dadurch bedingt entsteht ein Gegenfeld, sodass die Mikrowelle nicht durch die Metallstäbe hindurchtreten kann:



maximaler Empfang   kein Empfang

Entsprechend läßt sich auch die Polarisation von sichtbarem Licht nachweisen. Hierzu verwendet man als Polarisationsfilter eine Folie mit parallel ausgerichteten Kohlenwasserstoffketten, die effektiv wie das obige Metallgitter wirken.