# 6. Retardierte Potentiale:

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie eine zeitabhängige Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ bzw. Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ elektromagnetische Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ erzeugen kann. Das bedeutet, dass wir die vollen Maxwell-Gleichungen (4.12)–(4.15) bei vorgegebenem $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$ lösen werden.

## 6.1 Kontinuitätsgleichung:

Zunächst bemerken wir, dass die Maxwell-Gleichungen (4.12)–(4.15) nicht für beliebige $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$ aufgestellt werden können. Hierzu bilden wir die Divergenz von (4.15) und erhalten aufgrund von (3.17):

$$\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \tag{6.1}$$

Einsetzen von (4.12) in (6.1) führt auf

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 c^2}\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \tag{6.2}$$

was sich aufgrund von (4.17) auf die Kontinuitätsgleichung reduziert:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \tag{6.3}$$

Hierbei ist (6.3) eine lokale Formulierung für die Ladungserhaltung. Integrieren wir nämlich (6.3) über das ganze Volumen, so folgt mit Hilfe des Gaußschen Satzes (1.31):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dV\ \rho(\vec{r},t) = 0 \tag{6.4}$$

da wir wieder annehmen, dass $\vec{j}(\vec{r},t)$ im Unendlichen schnell genug verschwindet. Aufgrund von (2.33) besagt (6.4), dass die Ladung im gesamten Raum eine Erhaltungsgröße darstellt.

Demnach können wir festhalten, dass nur solche $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$ in den Maxwell-Gleichungen (4.12)–(4.15) verwendet werden dürfen, die der Kontinuitätsgleichung (6.3) genügen. Wir bemerken, dass Maxwell den sogenannten Verschiebungsstrom $\partial\vec{E}(\vec{r},t)/\partial t$ in (4.15) nur deshalb eingeführt hat, damit die Kontinuitätsgleichung (6.3) gewährleistet ist. Mit dieser theoretischen Vorhersage des Verschiebungsstroms ging Maxwell über die experimentellen Ergebnisse von Faraday hinaus. Der Verschiebungsstrom wurde erst am Ende des 19. Jahrhunderts von Röntgen direkt experimentell nachgewiesen. Indirekt wurde die Existenz des Verschiebungsstromes aber schon durch den Nachweis elektromagnetischer Wellen bestätigt. Ohne den Verschiebungsstrom hätte Maxwell keine elektromagnetischen Wellen als Lösung seiner Maxwell-Gleichungen erhalten.

## 6.2 Einführung der Potentiale:

Im Rahmen der Elektrostatik und der Magnetostatik haben wir die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$ gemäß (2.25) und (3.21) durch die Potentiale $\varphi$ und $\vec{A}$ ausgedrückt. Dieses Vorgehen verallgemeinern wir nun auf zeitabhängige Felder.

Hierzu betrachten wir zunächst die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen (4.13) und (4.14). Das sind diejenigen Maxwell-Gleichungen, die nicht von $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$ abhängen. Zunächst schließen wir in Verbindung mit dem Helmholtzschen Vektorzerlegungssatz in Abschnitt 4.1, dass sich die magnetische Induktion $\vec{B}$ aufgrund von (4.13) als Rotation eines Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r},t)$ darstellen läßt:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r},t) \tag{6.5}$$

Einsetzen von (6.5) in (4.14) führt auf

$$\operatorname{rot}\left\{ \vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \right\} = \vec{0} \tag{6.6}$$

Aufgrund des Helmholtzschen Vektorzerlegungssatzes in Abschnitt 4.1 folgern wir, dass es ein skalares Potential $\varphi(\vec{r},t)$ mit der Eigenschaft

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{6.7}$$

geben muß. Demnach lassen sich die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ gemäß (6.5), (6.7) auf die Potentialfelder $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ zurückführen.

Die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ sind gemäß der Lorentz-Kraft (4.18), (4.19) durch ihre Kraftwirkung auf ruhende und bewegte Ladungen definiert. Deshalb stellen sie die physikalisch relevanten Felder dar. Demgegenüber sind die Potentialfelder $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ nicht physikalisch eindeutig festgelegt. Diese Eichfreiheit in $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ kommt dadurch zum Ausdruck, dass man $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ durch Eichtransformation verändern kann. Es sei $\Lambda(\vec{r},t)$ ein beliebiges Eichfeld. Dann sind die Eichtransformationen gegeben durch

$$\varphi'(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \Lambda(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (6.8)$$

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \operatorname{grad} \Lambda(\vec{r},t) \qquad (6.9)$$

In der Tat erhalten wir

$$\vec{E}'(\vec{r},t) \overset{(6.7)}{=} -\operatorname{grad} \varphi'(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}'(\vec{r},t)}{\partial t} \overset{(6.8),(6.9)}{=}$$

$$-\operatorname{grad} \varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \overset{(6.7)}{=} \vec{E}(\vec{r},t) \qquad (6.10)$$

und entsprechend

$$\vec{B}'(\vec{r},t) \overset{(6.5)}{=} \operatorname{rot} \vec{A}'(\vec{r},t) \overset{(6.9)}{=} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r},t) \overset{(6.5)}{=} \vec{B}(\vec{r},t) \qquad (6.11)$$

Diese Eichfreiheit in $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ kann man nun bei der Lösung der vollen Maxwell-Gleichungen (4.12)–(4.15) ausnutzen.

## 6.3 Bewegungsgleichungen der Potentiale:

Die homogenen Maxwell-Gleichungen (4.13), (4.14) sind durch (6.5), (6.7) schon automatisch erfüllt. Einsetzen von (6.7) in (4.12) führt auf

$$-\Delta \varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad (6.12)$$

Entsprechend folgt aus (4.15), (6.5), (6.7) mit Hilfe von (3.24)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r},t) - \Delta \vec{A}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} \qquad (6.13)$$

Demnach genügen die Potentialfelder $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ den beiden gekoppelten Bewegungsgleichungen (6.12), (6.13). Wir verwenden nun die Eichfreiheit in $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$, um diese gekoppelten Bewegungsgleichungen zu entkoppeln. Hierzu wählen wir die Lorentz-Eichung

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \qquad (6.14)$$

Mit Hilfe von (6.14) reduzieren sich (6.12), (6.13) auf die inhomogenen Wellengleichungen

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\vec{r},t) = - \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad (6.15)$$

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(\vec{r},t) = - \mu_0 \vec{j}(\vec{r},t) \qquad (6.16)$$

Dabei ist die Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ die Inhomogenität der Wellengleichung (6.15) für das skalare Potential $\varphi(\vec{r},t)$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ die Inhomogenität der Wellengleichung (6.16) für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$. Wir bemerken, dass sich (6.15) in der Elektrostatik auf (2.28) und (6.16) in der Magnetostatik auf (3.27) reduzieren. Außerdem erhalten wir im Vakuum, d.h. für $\rho(\vec{r},t)=0$ und $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{0}$, dass (6.15), (6.16) die Aussage, dass die Potentialfelder $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ einer homogenen Wellengleichung (5.26) genügen.

## 6.4 Ergebnisse für Potentiale:

Die inhomogenen Wellengleichungen (6.15), (6.16) lassen sich mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktionen konstruktiv lösen. Diese Lösungsmethode ist aber für unsere Vorlesung zu umfänglich, daher werden wir sie hier nicht näher vorstellen. Stattdessen geben wir die Lösungen von (6.15), (6.16) sofort an und diskutieren deren physikalischen Gehalt:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dV' \, \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (6.17)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (6.18)$$

Wie erwartet werden also die Potentiale $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ durch die Ladungs- und Stromdichten $\rho(\vec{r}\,',t')$, $\vec{j}(\vec{r}\,',t')$

bestimmt. Außerdem stellen wir fest, dass (6.17), (6.18) den Resultaten (2.48), (2.49) bzw. (3.28) ähneln, die aus der Elektrostatik bzw. der Magnetostatik bekannt sind. Neu an (6.17), (6.18) ist der Umstand, dass die Ladungs- und Stromdichte $\varrho(\vec{r}\,',t')$, $\vec{j}(\vec{r}\,',t')$ zur früheren (= retardierten) Zeit

$$t' = t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}\,'| \qquad (6.19)$$

ausgewertet wird. Dieser Retardierungseffekt kommt dadurch zustande, dass sich Signale mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten. Das bedeutet, dass gemäß (6.17), (6.18) nur diejenige Ladungs- und Stromdichte $\varrho(\vec{r}\,',t')$, $\vec{j}(\vec{r}\,',t')$ zu den Potentialen $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ beitragen, für die (6.19) erfüllt ist. Deshalb bezeichnet man (6.17), (6.18) als retardierte Potentiale.

Wir zeigen nun, dass die beiden retardierten Potentiale (6.17), (6.18) tatsächlich der Lorentz-Eichung (6.14) genügen. Hierzu erhalten wir aus (6.17) zunächst

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial \varrho(\vec{r}\,',t')}{\partial t'} \qquad (6.20)$$

und entsprechend aus (6.18)

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \left\{ -\left[\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t') + \frac{\vec{\nabla}t'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cdot\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}\,',t')}{\partial t'}\right\} \qquad (6.21)$$

Eine partielle Integration im ersten Term von (6.21) führt mit Hilfe des Satzes von Gauß zu

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\operatorname{div}'\vec{j}(\vec{r}\,',t') \qquad (6.22)$$

Aufgrund von (4.17) erhalten wir aus (6.20) und (6.22)

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left\{\frac{\partial \varrho(\vec{r}\,',t')}{\partial t'} + \operatorname{div}'\vec{j}(\vec{r}\,',t')\right\} \qquad (6.23)$$

Demnach folgt aus (6.23) die Lorentz-Eichung (6.14), da Ladungs- und Stromdichte der Kontinuitätsgleichung (6.3) genügen.

Entsprechend läßt sich auch explizit zeigen, dass die retardierten Potentiale (6.17), (6.18) tatsächlich den inhomogenen Wellengleichungen (6.15), (6.16) genügen. Au-

Beiden stellen wir fest, dass man aus den retardierten Potentialen (6.17), (6.18) mit Hilfe von (6.5), (6.7) die entsprechenden elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ berechnen kann. Diese verallgemeinern dann die entsprechenden Resultate (2.50) und (3.31) der Elektrostatik und der Magnetostatik.

## 6.5 Liénard-Wiechert-Potentiale:

Zum Schluß dieses Kapitels diskutieren wir eine spezielle Anwendung der retardierten Potentiale (6.17), (6.18). Hierzu betrachten wir eine Punktladung $q$, die sich entlang der Bahn $\vec{R}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{V}(t) = \dot{\vec{R}}(t)$ bewegt. Durch diese bewegte Punktladung wird ein elektromagnetisches Feld erzeugt, dessen retardierte Potentiale wir nun berechnen.

Für die bewegte Punktladung sind Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ wie folgt gegeben:

$$\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{R}(t)) \tag{6.24}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\,\dot{\vec{R}}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{R}(t)) \tag{6.25}$$

Einsetzen von (6.24), (6.25) in (6.17), (6.18) führt auf

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\,\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\right) \tag{6.26}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\int dt'\,\frac{\dot{\vec{R}}(t')}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\,\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\right) \tag{6.27}$$

Hierbei wurde ein Hilfsintegral über eine eindimensionale Delta-Funktion $\delta(t)$ eingeführt, die analog zu (2.31), (2.32) die Eigenschaften

$$\text{(D1)}\quad \delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0 \tag{6.28}$$

$$\text{(D2)}\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dt\,\delta(t) = 1 \text{ für } \varepsilon > 0 \tag{6.29}$$

besitzt. Die beiden $t'$-Integrale in (6.26), (6.27) sind nicht so direkt ausführbar. Hierzu ist es notwendig, die Delta-Funktion $\delta(f(t'))$ mit

$$f(t') = t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c} \tag{6.30}$$

zu betrachten. Die Delta-Funktion $\delta(f(t))$ besitzt die Eigenschaft

$$\delta(g(t')) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\dot{g}(t'_j)|}\, \delta(t - t'_j) \tag{6.31}$$

Hierbei stellen $t'_j$ mit $j=1,\dots,n$ die einfachen Nullstellen der Funktion (6.30) dar:

$$g(t'_j) = 0 \quad ; \quad j = 1,\dots,n \tag{6.32}$$

Bezeichnen wir diese Nullstellen der Funktion (6.30) mit $t'_j = t_{ret,j}$ für $j=1,\dots,n$, so sind sie Lösungen der impliziten Gleichungen

$$t - t_{ret,j} = \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t_{ret,j})|}{c} \quad ; \quad j = 1,\dots,n \tag{6.33}$$

Ferner erhalten wir für die Ableitung der Funktion (6.30)

$$\dot{g}(t) = 1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} \cdot \frac{\dot{\vec{R}}(t)}{c} \tag{6.34}$$

Unter Berücksichtigung von (6.31) und (6.34) lassen sich dann die beiden $t'$-Integrale in (6.26), (6.27) formal ausführen und wir erhalten:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t_{ret,j})|} \cdot \frac{1}{|\dot{g}(t_{ret,j})|} \tag{6.35}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{\vec{R}}(t_{ret,j})}{|\vec{r} - \vec{R}(t_{ret})|} \cdot \frac{1}{|\dot{g}(t_{ret,j})|} \tag{6.36}$$

Dies sind die retardierten Potentiale einer bewegten Punktladung und werden als Liénard-Wiechert-Potentiale bezeichnet.

Es ist zu beachten, dass nur diejenigen Lösungen $t_{ret,j}$ für $j=1,\dots,n$ von (6.33) zu entsprechenden Summanden in den Liénard-Wiechert-Potentialen führen, die physikalisch sind. Es ist zu verlangen, dass eine physikalische Retardierungszeit $t_{ret,j}$ reell ist und dass sie der Kausalitätsbeziehung

$$t - t_{ret,j} \overset{(6.33)}{\geq} 0 \tag{6.37}$$

genügen muss.

Im Falle einer gleichförmig bewegten Punktladung im Vakuum stellt sich heraus, dass (6.33) nur eine einzige Lösung besitzt, so dass die Liénard-Wiechert-Potentiale (6.35), (6.36) nur aus einem Summanden bestehen.

Bewegt sich aber eine Punktladung gleichförmig in Materie, so kann dessen Geschwindigkeit größer werden als die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in diesem Medium. Dann gibt es Raumbereiche, wo (6.33) keine Lösung besitzt und die Liénard-Wiechert-Potentiale (6.35), (6.36) verschwinden. Bei anderen Raumbereichen wiederum hat (6.33) sogar zwei physikalische Lösungen, sodass (6.35), (6.36) aus zwei Summanden bestehen. Um im Grenzbereich, wo diese beiden Raumbereiche aufeinander stoßen, werden die Liénard-Wiechert-Potentiale sogar unendlich groß und führen dort zur sogenannten Tscherenkow-Strahlung. Hier besteht eine physikalische Analogie zum Mach-Kegel der Akustik.