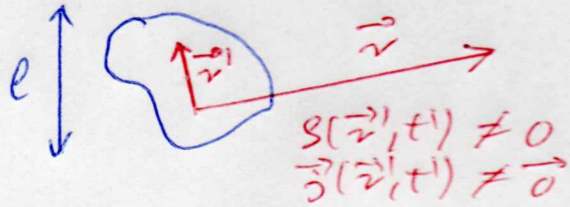
# 7 Hertzscher Dipol:

Wir wenden uns nun dem Problem zu, das elektromagnetische Feld zu berechnen, das von einer zeitabhängigen, lokalisierten Ladungs- und Stromverteilung erzeugt wird. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, das elektromagnetische Feld weit weg von der Ladungs- und Stromverteilung zu betrachten:

Näherung: $r \gg l$ (7.1)




## 7.1 Nah- und Fernzone:

Wir gehen hierzu von einer Ladungsverteilung aus, die harmonisch mit der Frequenz $\omega$ schwingt:

$$\rho(\vec{r}\,',t') = \rho(\vec{r}\,') \sin \omega t' \qquad (7.2)$$

Hierbei beschreibt $\rho(\vec{r}\,')$ die räumliche Ausdehnung der Ladungsverteilung. Es sieht zunächst so aus, als ob (7.2) nur einen Spezialfall darstellt. Wir können aber eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,',t')$ immer in ihre Fourier-Komponenten zerlegen. Daher beinhaltet die Lösung des speziellen Problems (7.2) in Wirklichkeit sogar die Lösung des allgemeinen Problems.

Wir wenden nun das retardierte Vektorpotential (6.18) für die Näherung $r \gg l$ in führender Ordnung berechnen. Wir erhalten zunächst

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} \qquad (7.3)$$

Eine entsprechende Näherung in der Stromverteilung

$$\vec{j}\left(\vec{r}\,', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) \approx \vec{j}\left(\vec{r}\,', t-\frac{|\vec{r}|}{c}\right) \qquad (7.4)$$

würde aber bedeuten, dass $\vec{j}(\vec{r}\,',t')$ immer zur gleichen Zeit $t' = t - |\vec{r}|/c$ ausgewertet wird unabhängig vom Ort $\vec{r}\,'$. Wir erwarten aber, dass $\vec{j}(\vec{r}\,',t')$ wie $\rho(\vec{r}\,',t')$ in (7.2) mit der Kreisfrequenz $\omega$, d.h. der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ oszilliert. Deshalb ist die Näherung (7.4) nur dann physikalisch konsistent, wenn die Retardierungszeit $|\vec{r}\,'|/c \lesssim l/c$ innerhalb der Ladungsverteilung klein gegenüber der Periodendauer $T$ ist:

$$\frac{l}{c} \ll T \tag{7.5}$$

Aufgrund von (5.36) geht (7.5) über in

$$l \ll cT = \lambda \tag{7.6}$$

Um nun aber sowohl (7.2) als auch (7.6) erfüllen zu können, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder befindet man sich in der Nahzone

$$\text{NZ:} \qquad l \ll r \ll \lambda \tag{7.7}$$

oder aber in der Fernzone

$$\text{FZ:} \qquad l \ll \lambda \ll r \tag{7.8}$$

Wir erwarten, dass sich die elektromagnetischen Felder in der Nahzone grundsätzlich von denen in der Fernzone unterscheiden.

## 7.2 Vektorpotential:

Das Einsetzen der beiden Näherungen (7.3), (7.4) in das retardierte Vektorpotential (6.18) führt auf

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) dV' \tag{7.9}$$

Da wir die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}\,',t')$ im allgemeinen nicht kennen, können wir das Volumenintegral (7.9) so nicht direkt auswerten. Verwenden wir aber die Kontinuitätsgleichung (6.3), so läßt sich das Volumenintegral (7.9) indirekt auswerten. Hierzu betrachten wir das Integral

$$I_k = \int dV' \left\{ j_k\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c}\right) - x'_k \frac{\partial \rho(\vec{r}\,', t - r/c)}{\partial t} \right\} \tag{7.10}$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (6.3) reduziert sich (7.10) auf

$$I_k = \int dV' \operatorname{div}' \left\{ x'_k \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c}\right) \right\} \tag{7.11}$$

so dass das Integral aufgrund des Satzes von Gauß verschwindet:

$$I_k = 0 \tag{7.12}$$

Demnach erhalten wir für das in (7.9) auszuführende Volumenintegral aus (7.10) und (7.12):

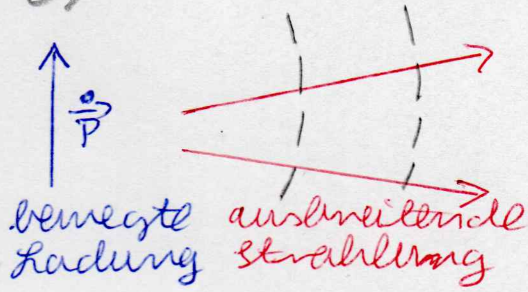
$$\int \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c}\right) dV' = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{r}\,' \rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c}\right) dV' \tag{7.13}$$

Führen wir das elektrische Dipolmoment

$$\vec{P}(t) = \int \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,', t)\, dV' \tag{7.14}$$

der Ladungsverteilung ein, so reduziert sich (7.9) schließlich auf das Ergebnis

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (7.15)$$




Demnach fällt das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ mit dem Radius $r$ ab, was sich durch eine auslaufende Kugelwelle interpretieren läßt: Eine Welle besitzt immer eine Energiedichte, die proportional zum Quadrat der Amplitude ist. Und im Abstand $r$ verteilt sich die Energiedichte einer Welle auf der Kugeloberfläche $4\pi r^2$. Für eine Kugelwelle ist nun charakteristisch, dass ihre Gesamtenergie auf jeder Kugeloberfläche dieselbe ist. Hieraus folgt dann, dass die Amplitude einer Kugelwelle proportional mit $1/r$ abfällt, so wie dies in (7.15) der Fall ist.

## 7.3 Magnetfeld:

Wir berechnen nun mit Hilfe von (6.5) das zu (7.15) gehörende Magnetfeld. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, dass das elektrische Dipolmoment der Ladungsverteilung in z-Richtung des kartesischen Koordinatensystems zeigt

$$\vec{p}(t) = p(t)\,\vec{e}_z \qquad (7.16)$$

so dass sich (7.15) reduziert auf

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{e}_z \qquad (7.17)$$

Das Magnetfeld (6.5) lautet dann

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z(\vec{r},t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r},t)}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_x(\vec{r},t)}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.18)$$

Für die x-Komponente erhalten wir

$$B_x(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 y}{4\pi r^3}\,\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\mu_0 y}{4\pi c r^2}\,\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (7.19)$$

und entsprechend für die y-Komponente

$$B_y(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 x}{4\pi r^3}\,\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mu_0 x}{4\pi c r^2}\,\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (7.20)$$

Demnach läßt sich das Magnetfeld in zwei Beiträge zerlegen:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_{NZ}(\vec{r},t) + \vec{B}_{FZ}(\vec{r},t) \qquad (7.21)$$

In der Nahzone (7.7) gilt

$$\vec{B}_{NZ}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \, \frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}}{r^3} \qquad (7.22)$$

und in der Fernzone (7.8) haben wir

$$\vec{B}_{FZ}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \, \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}}{r^2} \qquad (7.23)$$

Es ist zu beachten, dass (7.22) und (7.23) zwar für den Spezialfall (7.16) hergeleitet wurden, dass sie das Magnetfeld aber auch im Falle eines allgemeinen elektrischen Dipolmomentes darstellen. Der wesentliche Unterschied zwischen (7.22) und (7.23) besteht in der Ortsabhängigkeit. In der Nahzone (7.22) fällt das Magnetfeld mit $1/r^2$ ab, in der Fernzone (7.23) dagegen mit $1/r$.

## 7.4 Skalares Potential:

Bei der Näherung des retardierten skalaren Potentials (6.17) für $r \gg l$ muss man allerdings den Abstand $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ bis zur ersten Ordnung in $\vec{r}\,'$ entwickeln:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = r\sqrt{1-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} \approx r\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right) \qquad (7.24)$$

Setzen wir (7.24) in (6.17) ein und führen wir systematisch eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung in $\vec{r}\,'$ durch, so erhalten wir

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int \rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV' + \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int \vec{r}\,'\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV' + \frac{\vec{r}}{cr^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{r}\,'\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV'\right\} \qquad (7.25)$$

Das erste Volumenintegral verschwindet bei einer neutralen Ladungsverteilung, während das zweite und dritte Volumenintegral auf das elektrische Dipolmoment (7.14) führen:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\vec{r}}{cr^2}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} \qquad (7.26)$$

Wir überprüfen zunächst, ob die Ergebnisse (7.15) und (7.26) für die retardierten Potentiale mit $r \gg l$ mit der Lorentz-Eichung (6.14) kompatibel sind. Einerseits folgt aus (7.15)

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\vec{r}}{cr^2}\,\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} \qquad (7.27)$$

andererseits erhalten wir aus (7.26) mit (4.17)

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi(\vec r,t)}{\partial t} = \frac{-\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\vec r}{r^3}\cdot\dot{\vec p}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{\vec r}{cr^2}\cdot\ddot{\vec p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} \tag{7.28}$$

in Übereinstimmung mit der Lorentz-Eichung (6.14).

## 7.5 Elektrische Feldstärke:

Wir berechnen nun mit Hilfe von (6.7) das entsprechende elektrische Feld. Auch hier verwenden wir zur Vereinfachung der Rechnung die Annahme (7.16), so dass sich (7.26) reduziert auf

$$\varphi(\vec r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z}{r^3}p\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{z}{cr^2}\dot p\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} \tag{7.29}$$

Aus (7.17), (7.29) ergibt sich das elektrische Feld (6.7) zu

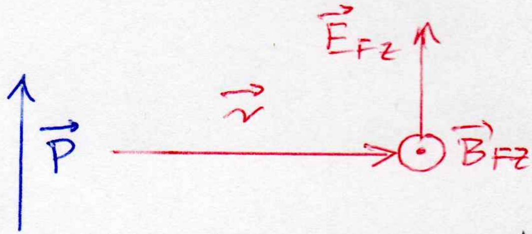
$$\vec E(\vec r,t) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec e_z}{r^3}p\left(t-\frac{r}{c}\right) - 3\frac{z}{r^4}\frac{\vec r}{r}p\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{z}{cr^3}\frac{\vec r}{r}\dot p\left(t-\frac{r}{c}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\vec e_z}{cr^2}\dot p\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{2z}{cr^3}\frac{\vec r}{r}\dot p\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{z}{c^2r^2}\frac{\vec r}{r}\ddot p\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} - \frac{\mu_0\vec e_z}{4\pi r}\ddot p\left(t-\frac{r}{c}\right) \tag{7.30}$$

In der Fernzone reduziert sich (7.30) mit (4.17) auf

$$\vec E_{FZ}(\vec r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[\ddot{\vec p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec r\right]\times\vec r}{r^3} \tag{7.31}$$

und schließlich lesen wir aus (7.23) und (7.31) für die Fernzone ab:

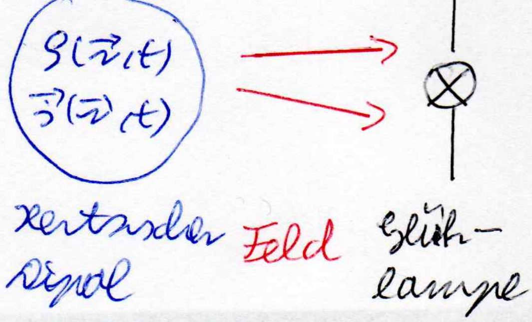
$$\vec E_{FZ}(\vec r,t) = c\,\vec B_{FZ}(\vec r,t)\times\frac{\vec r}{r} \tag{7.32}$$




Demnach stehen elektrisches und magnetisches Feld senkrecht aufeinander. Außerdem gilt nach (7.23) und (7.31), dass sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec r$ stehen. Wir bemerken ferner, dass die Beträge von $\vec E_{FZ}(\vec r,t)$ und $\vec B_{FZ}(\vec r,t)$ mit dem Abstand $r$ abfallen, wie das für Kugelwellen typisch ist.

## 7.6 Motivation:

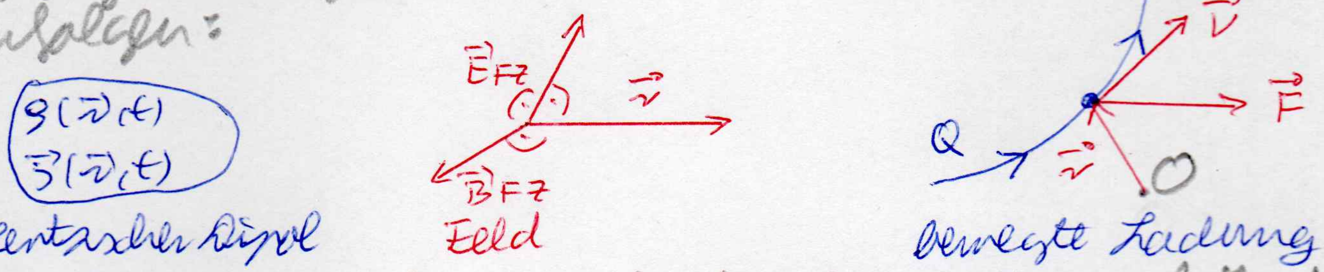
Nachdem wir nun die elektromagnetischen Felder in der Fernzone kennen, interessieren wir uns dafür, wie hell die Glühlampe im Empfänger leuchtet und welche Leistung der Hertzsche Dipol in welcher Richtung abstrahlt.



Das Leuchten der Glühbirne zeigt, dass der Empfänger Energie absorbiert. Diese Energie steckt im elektromagnetischen Feld, das sich vom Hertzschen Dipol zum Empfänger hin ausbreitet. Wir werden nun eine Energiebilanz für das elektromagnetische Feld aufstellen.

## 7.7 Energiebilanz:

Aufgrund der Erhaltung der Energie muss eine Änderung der elektromagnetischen Feldenergie durch den Zu- oder Abfluß von Strahlungsenergie bzw. den Austausch von Energie mit geladenen Teilchen wie z.B. im Empfänger erfolgen:




Die Lorentz-Kraft (4.18) beschreibt die Impulsänderung eines geladenen Teilchens pro Zeiteinheit

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} \tag{7.33}$$

Die dadurch verursachte Energieänderung des Teilchens pro Zeiteinheit ist die Leistung

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}W \tag{7.34}$$

Setzen wir die Lorentz-Kraft (4.18) in (7.34) ein, so entfällt der Term mit dem Magnetfeld, da dieser senkrecht auf der Geschwindigkeit $\vec{v}$ steht:

$$Q\,\vec{E}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}W \tag{7.35}$$

Wir werden nun die Energiebilanz (7.35) für ein einzelnes geladenes Teilchen auf ein kontinuierlich ausgedehntes System erweitern. Hierzu führen wir die mechanische Energiedichte $w_m(\vec{r},t)$ ein:

$$W = \int w_m(\vec{r},t)\,dV \tag{7.36}$$

Damit geht (7.35) im Kontinuumsgrenzfall über in

$$\int \frac{\partial w_m(\vec{r},t)}{\partial t}\,dV = \int \rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{v}\,dV = \int \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\,dV \tag{7.37}$$

Hierbei haben wir die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{v}$ eingeführt. Der Energietransfer ins mechanische System pro Zeit- und Volumeneinheit wird demnach beschrieben durch

$$\frac{\partial w_m(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t) \qquad (7.38)$$

da (7.37) für jedes Volumen gilt.

## 7.8 Verwendung der Maxwell-Gleichungen:

Wir werten nun (7.38) unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen weiter aus. Zunächst eliminieren wir mit Hilfe von (4.15) die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$:

$$\frac{\partial w_m(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\left\{\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\right\} \qquad (7.39)$$

Anschließend verwenden wir eine Vektoridentität, die sich komponentenweise überprüfen läßt:

$$\operatorname{div}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right] = \vec{B}(\vec{r},t)\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) - \vec{E}(\vec{r},t)\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) \qquad (7.40)$$

Damit erhalten wir aus (7.39)

$$\frac{\partial w_m(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0}\operatorname{div}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right] + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$-\frac{1}{\mu_0 c^2}\vec{E}(\vec{r},t)\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \underset{(4.14),(4.17)}{=} -\operatorname{div}\left[\frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right]$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} - \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (7.41)$$

Der Energieerhaltungssatz (7.41) für das Feld-Materie-System läßt sich damit auf folgende Form bringen:

$$\frac{\partial w_m(\vec{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial w_e(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S}(\vec{r},t) = 0 \qquad (7.42)$$

Hierbei lautet die Dichte der elektromagnetischen Feldenergie

$$w_e(\vec{r},t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}(\vec{r},t)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}(\vec{r},t)^2 \qquad (7.43)$$

und der Poynting-Vektor, der die Energiestromdichte beschreibt, ist gegeben durch

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t) \qquad (7.44)$$

Die physikalische Interpretation von (7.42) erschließt sich durch Integration über ein Volumengebiet V und der Verwendung des Gaußschen Satzes im dritten Term

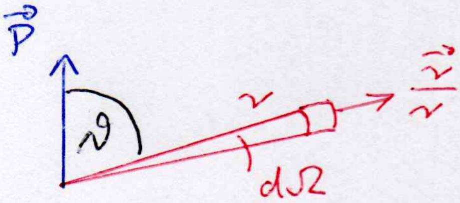
$$\frac{d}{dt}\int_V w_e(\vec{r},t)\,dV + \frac{d}{dt}\int_V w_m(\vec{r},t)\,dV + \oint_{\partial V}\vec{S}(\vec{r},t)\cdot d\vec{F} = 0 \qquad (7.45)$$

Der erste bzw. zweite Term beschreibt die Änderung der

Feldenergie bzw. der mechanischen Energie pro Zeiteinheit im Volumen V, während der dritte Term die durch den Rand $\partial V$ des Volumens V strömende Feldenergie darstellt.

## 7.9 Anwendung auf Hertzschen Dipol:

Wir berechnen nun, wieviel Leistung $dP$ in einen Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlt wird:




$$dP = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{S}(\vec{r},t)\, r^2\, d\Omega \qquad (7.46)$$

Befinden wir uns weit weg vom Hertzschen Dipol, dann können wir den Poynting-Vektor (7.44) in der Fernzone berechnen:

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{FZ}(\vec{r},t) \times \vec{B}_{FZ}(\vec{r},t) \overset{(7.32)}{=} \frac{c}{\mu_0}\left[\vec{B}_{FZ}(\vec{r},t) \times \frac{\vec{r}}{r}\right] \times \vec{B}_{FZ}(\vec{r},t)$$

$$= \frac{c}{\mu_0}\left\{\frac{\vec{r}}{r}\left[\vec{B}_{FZ}(\vec{r},t)\right]^2 - \cancel{\vec{B}_{FZ}(\vec{r},t)\left[\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{B}_{FZ}(\vec{r},t)\right]}\right\} \qquad (7.47)$$

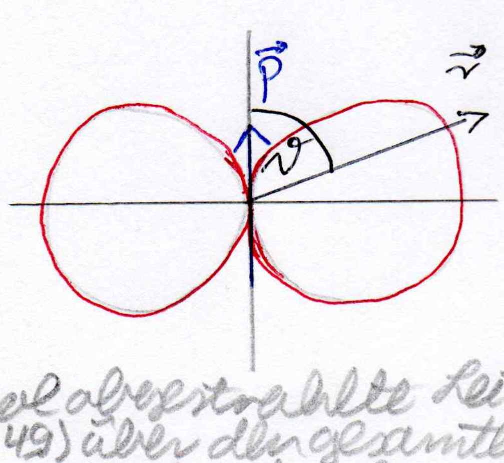
Der zweite Term in (7.47) verschwindet, da das Magnetfeld in der Fernzone gemäß (7.23) senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung $\vec{r}$ steht. Einsetzen von (7.23) in (7.47) führt daher für den Hertzschen Dipol auf

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{c\,\mu_0}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \frac{r^2\, \ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)^2 \sin^2\vartheta}{r^4}\, \frac{\vec{r}}{r} \qquad (7.48)$$

wobei $\vartheta$ den Winkel zwischen dem elektrischen Dipolmoment $\vec{p}$ und der Ausbreitungsrichtung $\vec{r}$ bezeichnet. Einsetzen von (7.48) in (7.46) führt auf die Strahlungsleistung pro Raumwinkel $d\Omega$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0\, \ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)^2 \sin^2\vartheta}{16\,\pi^2\, c} \qquad (7.49)$$

Demnach erfolgt eine maximale Abstrahlung in der Ebene senkrecht zum Hertzschen Dipol mit $\vartheta = \pi/2$, keine Abstrahlung erfolgt in Richtung des Dipols mit $\vartheta = 0, \pi$.




Die insgesamt vom Hertzschen Dipol abgestrahlte Leistung ergibt sich dadurch, dass (7.49) über den gesamten Raumwinkel integriert wird. Dies führt auf folgende Nebenrechnung:

$$\int \sin^2\vartheta\, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\, \sin\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)$$

$$\underline{u(\vartheta)=\cos\vartheta} \quad \int_{-1}^{+1} du\,(1-u^2)\cdot 2\pi = 2\pi\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{+1} = \frac{8\pi}{3} \tag{7.50}$$

Damit lautet das Ergebnis

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega}\,d\Omega \overset{(7.49),(7.50)}{=} \frac{\mu_0}{6\pi c}\,\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)^2 \approx \frac{\mu_0\,\ddot{\vec{p}}(t)^2}{6\pi c} \tag{7.51}$$

Für eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,',t')$ der Form (7.2) folgt das elektrische Dipolmoment (7.14) zu

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin\omega t, \quad \vec{p}_0 = \int \vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')\,dV' \tag{7.52}$$

Einsetzen von (7.52) in (7.51) führt für die im zeitlichen Mittel im Fernfeld abgestrahlte Leistung

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, P(t) \tag{7.53}$$

auf das Strahlungsgesetz von Lord Rayleigh

$$\overline{P} = \frac{\mu_0\, p_0^2\, \omega^4}{12\pi c} \tag{7.54}$$

Es besagt, dass große Frequenzen besonders stark abstrahlen. Eine praktische Anwendung dieses Resultates ist die Erklärung dafür, dass die Farbe des Himmels blau ist. Das Sonnenlicht regt in der oberen Luftschicht Elementardipole zu Schwingungen an. Da die Wellenlänge des roten Lichts mit $\lambda(\text{rot}) = 800$ nm doppelt so groß ist wie die des blauen Lichts mit $\lambda(\text{blau}) = 400$ nm, strahlen die vom blauen Licht angeregten Elementardipole nach dem Rayleigh-Strahlungsgesetz (7.54) 16 mal so viel Energie ab wie die vom roten Sonnenlicht angeregten Dipole. Man kann nun davon ausgehen, dass ein solcher Dipol genau so viel Energie absorbiert wie er ausstrahlt. Dann besagt das Rayleigh-Strahlungsgesetz (7.54), dass das blaue Licht 16 mal so stark absorbiert wird wie das rote Licht. Demnach ist die Eindringtiefe des blauen Lichts mit $d(\text{blau}) = 4$ km etwa 16 mal so klein wie die des roten Sonnenlichts mit $d(\text{rot}) = 64$ km. Am Tag gelangt das Sonnenlicht durch eine 8 km dicke Atmosphäre. Dann ist ein Teil des blauen Sonnenlichts durch die Dipole der Atmosphäre schon absorbiert und gestreut worden, während das rote Sonnenlicht noch gar nicht gestreut wurde, so dass der Himmel blau ist. Am Abend dagegen liegt eine umgekehrte Situation vor, da das Sonnenlicht durch eine bis zu 100 km dicke Atmosphäre gelangt. Dann ist das blaue Licht schon längst absorbiert worden, und nur noch das rote Licht wird etwas absorbiert und gestreut, was als Abendrot sichtbar ist.

Abschließend diskutieren wir noch die Polarisation des Streulichts. Das Sonnenlicht selber ist unpolarisiert. Es werden Dipole in der Atmosphäre angeregt, die senkrecht zur Ebene Sonnenlicht/Beobachter orientiert sind. Dann können die Dipole maximale Energie zum Beobachter abstrahlen. Blickt man also 90° zur Sonne, so ist das beobachtete Streulicht eindeutig polarisiert.