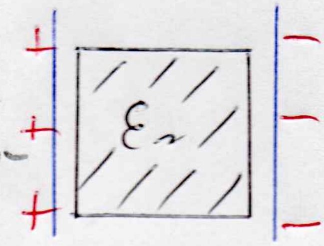
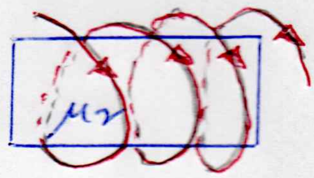
# 8. Elektrodynamik in Materie

Bisher haben wir uns darauf beschränkt, die Elektrodynamik im Vakuum in Anwesenheit freier Ladungen und Ströme zu behandeln. Nun wollen wir die Beschreibung erweitern und auch elektrodynamische Phänomene in Materie behandeln. Zwei grundlegende Beispiele aus Schule und Technik sollen erläutern, dass dieses Gebiet von praktischer Bedeutung ist.

- Plattenkondensator mit Dielektrikum:
  die Kapazität C eines Kondensators erhöht sich beim Eindringen eines Dielektrikums um die relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r$, d.h. $C \sim \varepsilon_r$.




- Spule mit Eisenkern:
  die Induktivität L einer Spule erhöht sich bei Anwesenheit eines paramagnetischen Kerns um die relative Permeabilitätskonstante $\mu_r$, d.h. $L \sim \mu_r$.




Wir untersuchen im Folgenden, wie sich die Maxwell-Gleichungen in Materie verändern. Dabei ist zu berücksichtigen, dass neben den freien auch gebundene Ladungen und Ströme auftreten können. Es stellt sich heraus, dass gebundene Ladungen die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ durch die Polarisation der Materie abschwächen. Im Unterschied dazu führen die gebundenen Ströme dazu, dass die magnetische Induktion $\vec{B}$ durch die Magnetisierung der Materie bei Paramagnetismus vergrößert und bei Diamagnetismus verkleinert wird.

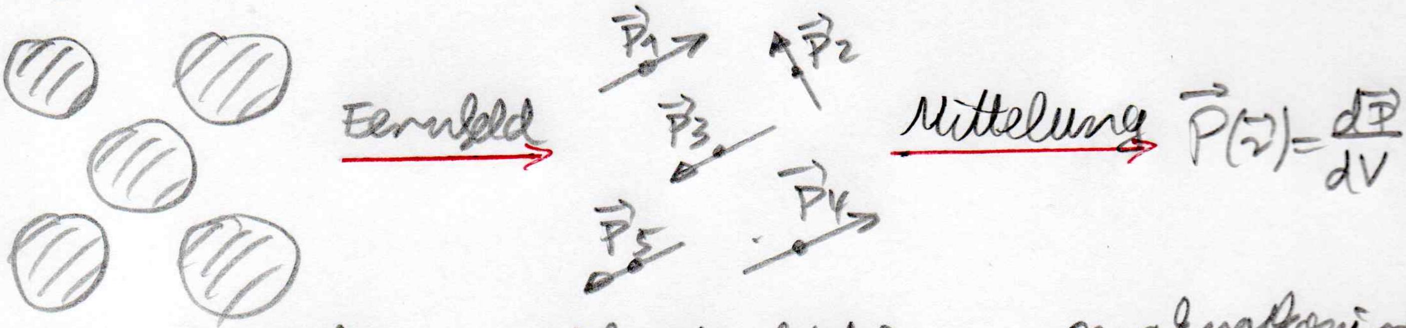
## 8.1 Makroskopische Elektrostatik:

Bisher wurde die Elektrostatik nur für freie Ladungen im Vakuum erfasst. Um elektrische Felder auch in einem nicht-leitenden Medium beschreiben zu können, ist eine Erweiterung erforderlich. Ein solches Dielektrikum besitzt nämlich auch nicht frei bewegliche Ladungen, die man als gebundene Ladungen bezeichnet und die Anwesenheit dieser gebundenen Ladungen verändert das elektrische Feld.

In einem Dielektrikum werden nämlich elektrische Dipolmomente induziert oder bereits existierende elektrische Dipole werden durch ein elektrisches Feld ausgerichtet. Dieser Effekt wird durch die Polarisation $\vec{P}$ erfaßt, die als Dipoldichte das elektrische Dipolmoment pro Volumen beschreibt:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \tag{8.1}$$

Bei dieser Definition der Polarisation haben wir offenbar ein Kontinuum angenommen. In Wirklichkeit aber besteht ein Dielektrikum aus diskreten Atomen oder Molekülen. In der makroskopischen Elektrostatik betrachten wir Größen, die zwar im Vergleich zur atomaren Längenskala von $10^{-10}$m über große, aber im Vergleich zur Systemgröße kleine räumliche Skalen als gemittelte Größen zu verstehen sind. Im folgenden gehen wir von der bisher bekannten mikroskopischen Elektrostatik aus und zeigen, wie sich die makroskopische Elektrostatik daraus ableiten läßt. Die dabei verfolgte Grundidee läßt sich wie folgt schematisch darstellen:




mikroskopische Ebene: ungeladene Atome/Moleküle

diskrete elektrische Dipolmomente

makroskopische Ebene: Polarisation

## 8.1.1 Multipolentwicklung:

Eine mikroskopische Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ führt zum elektrischen Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{8.2}$$

Die Ladungsdichte soll dabei räumlich begrenzt sein

$$\rho(\vec{r}\,') \begin{cases} \neq 0 & ; \ |\vec{r}\,'| < R \\ = 0 & ; \ |\vec{r}\,'| > R \end{cases} \tag{8.3}$$

und wir sind am elektrischen Potential $\varphi(\vec{r})$ an einem Ort $\vec{r}$ weit weg vom Raumbereich der Ladungsdichte interessiert, so dass gilt

$$|\vec{r}\,'| \ll |\vec{r}| \tag{8.4}$$

deshalb läßt sich das Coulomb-Potential als Green'sche Funktion der Poisson-Gleichung in (8.2) in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\left\{1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \dots\right\} \tag{8.5}$$

Einsetzen von (8.5) in (8.2) führt auf die Multipolentwicklung des elektrischen Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \dots\right\} \tag{8.6}$$

Hierbei bezeichnet $q$ die Ladung, also den Monopol, der Ladungsverteilung

$$q = \int dV'\ \varrho(\vec{r}\,') \tag{8.7}$$

und $\vec{p}$ beschreibt das elektrische Dipolmoment

$$\vec{p} = \int dV'\ \vec{r}\,'\ \varrho(\vec{r}\,') \tag{8.8}$$

## 8.1.2 Gebundene Ladungen:

Wir konzentrieren uns nun auf die Beschreibung der gebundenen Ladungen eines Dielektrikums. Da die Atome und Moleküle elektrisch neutral sind, verschwindet deren Monopolbeitrag im Fernfeld (8.4). Daher ist der führende Beitrag von Atomen und Molekülen durch den Dipolbeitrag gegeben. Im Folgenden werden wir alle höheren Multipolbeiträge nicht berücksichtigen, da deren Beiträge gegenüber dem Dipolbeitrag vernachlässigbar sind.

Wir summieren daher über die elektrischen Dipole $\vec{p}_k$ aller Atome und Moleküle im Dielektrikum an den jeweiligen Orten $\vec{r}_k$ und erhalten für das elektrische Potential der gebundenen Ladungen

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{\vec{p}_k\cdot(\vec{r}-\vec{r}_k)}{|\vec{r}-\vec{r}_k|^3} \tag{8.9}$$

All diese diskreten Dipolbeiträge lassen sich nun in eine Kontinuumsform überführen:

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV'\ \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{8.10}$$

wobei die Polarisation formal als Volumendichte der elektrischen Dipolmomente eingeführt wurde

$$\vec{P}(\vec{r}\,') = \sum_k \vec{p}_k \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_k) \tag{8.11}$$

Hierbei beinhaltet (8.10) schon die gesuchten Auswirkungen der gebundenen Ladungen des Dielektrikums auf das elektrische Potential. Man kann aber (8.10) noch weiter umformen und dabei ein physikalisch intuitiveres Resultat erzielen.

Hierzu erinnern wir an die Identitäten

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{8.12}$$

Einsetzen von (8.12) in (8.10) führt auf

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \, \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{8.13}$$

Es liegt nun nahe, eine partielle Integration anzustreben:

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dV' \left\{ \vec{\nabla}' \left[ \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,') \right\} \tag{8.14}$$

Im ersten Term wenden wir nun den Satz von Gauß an. Im Unterschied zu anderen Anwendungen des Satzes von Gauß vernachlässigen wir aber dieses Mal nicht das resultierende Oberflächenintegral. Wir gehen nämlich in (8.10) bzw. (8.14) davon aus, dass wir ein endliches Volumen $V$ des Dielektrikums betrachten. Damit geht (8.14) über in

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \frac{-\mathrm{div}' \vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \cdot d\vec{F}\,' \tag{8.15}$$

Der erste Term sieht so aus wie das elektrische Potential einer Volumenladungsdichte

$$\rho_g(\vec{r}) = -\mathrm{div}\, \vec{P}(\vec{r}) \tag{8.16}$$

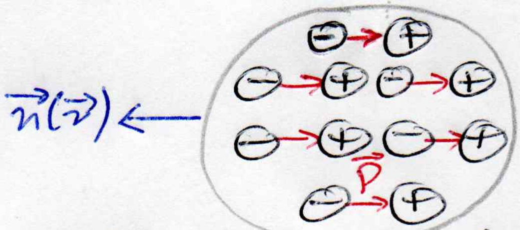
während der zweite Term dem elektrischen Potential einer Flächenladungsdichte

$$\sigma_g(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \tag{8.17}$$

entspricht, wobei $\vec{n}(\vec{r})$ den Normalenvektor der Oberfläche $\partial V$ bezeichnet. Die Beiträge (8.16) und (8.17) stammen also von den gebundenen Ladungen des Dielektrikums, die man auch als Polarisationsladungen bezeichnet.

Man kann auch intuitiv verstehen, wie die gebundenen Ladungen aufgrund der Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ zustande kommen. Hierzu stellen wir uns $\vec{P}(\vec{r})$ aus kleinen elektrischen Dipolen zusammengesetzt vor. Ist $\vec{P}(\vec{r}) = \text{const.}$, so kompensieren sich die positiven und negativen Ladungen der einzelnen Dipole im Innern, aber nicht an der Oberfläche. Dies erklärt die Entstehung der Flächenladungsdichte (8.17):

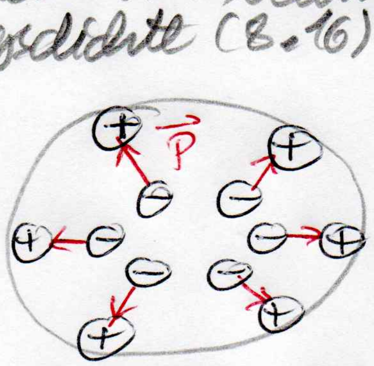
Oberflächen-ladung




$$\sigma_g(\vec{r}) = \vec{P} \cdot \vec{n}(\vec{r})$$

Ist $\vec{P}(\vec{r})$ aber nicht räumlich konstant, so kompensieren sich die gebundenen Ladungen der einzelnen elektrischen Dipole nicht mehr im Volumen und es entsteht eine Volumenladungsdichte (8.16):

Volumen-ladung




$$\rho_g(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})$$

Mit Hilfe von (8.16) und (8.17) geht (8.15) über in das Endergebnis für das elektrische Potential der gebundenen Ladungen:

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \, \frac{\rho_g(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\partial V} dF' \, \frac{\sigma_g(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{8.18}$$

## 8.1.3 Entelektrisierungstensor:

Wir betrachten nun als Spezialfall eine Polarisation, die räumlich konstant ist, d.h. $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}$. Dann folgt aus (8.16) – (8.18):

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{d\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \cdot \vec{P} \tag{8.19}$$

Für die entsprechende elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_g(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \varphi_g(\vec{r}) \tag{8.20}$$

erhalten wir dann die Komponenten

$$E_{gi}(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} N_{ij}(\vec{r}) \, P_j \tag{8.21}$$

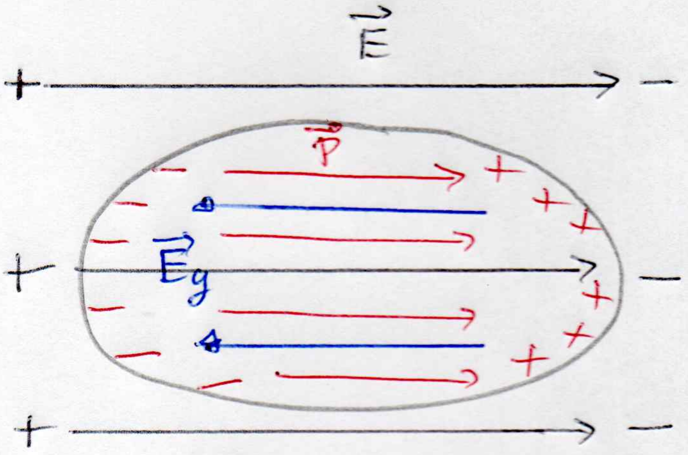
mit dem Entelektrisierungstensor

$$N_{ij}(\vec r) = \frac{-1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{x_i - x'_i}{|\vec r - \vec r'|^3}\, dF_j \qquad (8.22)$$

Offenbar führt die Oberflächenladung der Polarisation zu einem elektrischen Feld, das gemäß

$$\vec E_g = -\frac{1}{\varepsilon_0} N \vec P \qquad (8.23)$$

der Polarisation entgegengesetzt gerichtet ist.




Für den Entelektrisierungstensor $N$ können wir nun eine Spurbedingung ableiten. Für die Spur von $N$ erhalten wir zunächst

$$\mathrm{Sp}N = N_{ii} \overset{(8.22)}{=} \frac{-1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} \cdot d\vec F' \qquad (8.24)$$

Aufgrund von (8.12) reduziert sich dies auf

$$\mathrm{Sp}N = \frac{-1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[ \vec\nabla' \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} \right] \cdot d\vec F' \qquad (8.25)$$

Jetzt kann der Satz von Gauß angewandt werden:

$$\mathrm{Sp}N = \frac{-1}{4\pi} \int_V dV' \, \Delta' \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} \qquad (8.26)$$

Da das Coulomb-Potential gemäß (2.36) die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung ist, folgt

$$\mathrm{Sp}N = \frac{-1}{4\pi} \int_V dV' (-4\pi)\, \delta(\vec r - \vec r') = 1 \qquad (8.27)$$

da angenommen wurde, dass $\vec r$ innerhalb des Volumens $V$ liegt. Im Falle eines symmetrischen Volumens läßt sich diese Spurbedingung ausnutzen, um den Entelektrisierungstensor festzulegen, ohne das Oberflächenintegral (8.22) ausrechnen zu müssen. Beispielsweise gilt für eine Kugel aus Symmetriegründen

$$N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (8.28)$$

in Übereinstimmung mit (8.27).

### 8.1.4 Elektrisches Verschiebungsfeld:

Im Allgemeinen liegen in einem Medium sowohl freie als auch gebundene Ladungen vor. Die gesamte Ladungsdichte lautet daher

$$\rho(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) + \rho_g(\vec{r}) \qquad (8.29)$$

wobei die Ladungsdichte der gebundenen Ladungen durch (8.16) gegeben ist. Das entsprechende Gauß-Gesetz der Elektrostatik lautet daher:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \overset{(8.16),(8.29)}{=} \frac{\rho_f(\vec{r})}{\varepsilon_0} - \frac{\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad (8.30)$$

Führt man das dielektrische Verschiebungsfeld

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \qquad (8.31)$$

ein, so folgt aus (8.30):

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) \qquad (8.32)$$

das heißt, dass die Quellen des dielektrischen Verschiebungsfeldes $\vec{D}(\vec{r})$ nur die freien Ladungen sind. Dies ist das Gauß-Gesetz für Dielektrika. Offenbar hat diese Umformulierung des Gauß-Gesetzes in Dielektrika keinerlei Auswirkungen auf die zweite Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad (8.33)$$

Bildet man die Rotation von (8.31), so folgt mit (8.33)

$$\operatorname{rot} \vec{D}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{P}(\vec{r}) \qquad (8.34)$$

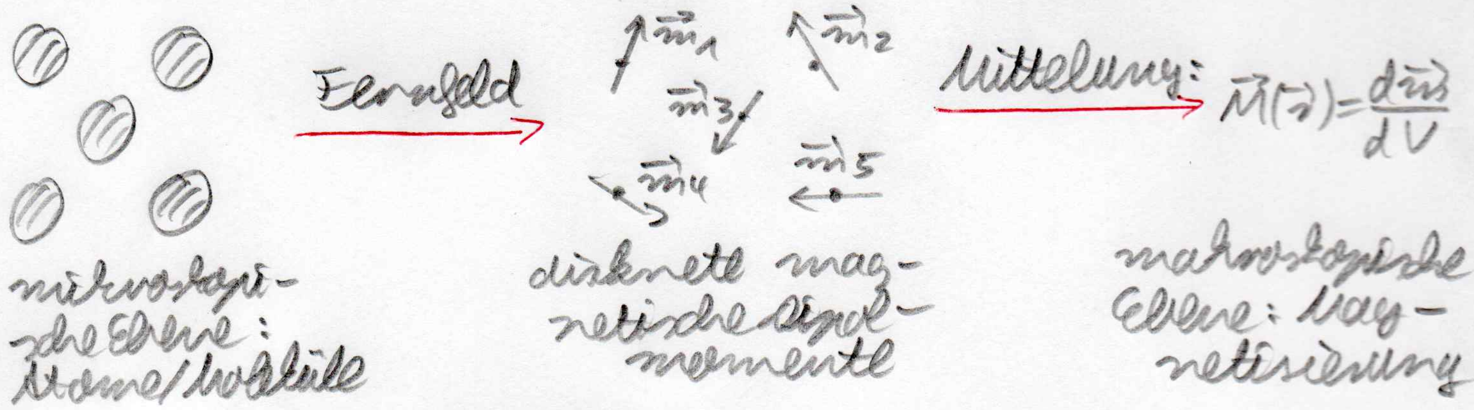
Das bedeutet also, dass die Wirbeldichte des dielektrischen Verschiebungsfeldes $\vec{D}(\vec{r})$ durch die Wirbeldichte der Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ gegeben ist. Aus (8.32) und (8.34) folgt also mit Hilfe des Helmholtzschen Vektorzerlegungssatzes, dass zur Berechnung des dielektrischen Verschiebungsfeldes $\vec{D}(\vec{r})$ nicht nur die freie Ladungsdichte $\rho_f(\vec{r})$ bekannt sein muss, sondern auch die Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$.

## 8.2 Makroskopische Magnetostatik:

Die bisherige Beschreibung der Magnetostatik ist auf Magnetfelder beschränkt, die durch freie Ströme im Vakuum hervorgerufen werden. Diese Beschreibung ist zu erweitern, um auch Magnetfelder in Materie bestimmen zu können. Durch die Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes werden in der Materie gebundene Ströme induziert, die bei Paramagnetismus (Diamagnetismus) zu einer Verstärkung (Verringerung) des von freien Strömen hervorgerufenen Magnetfeldes in der Materie führen. Dieser Effekt wird quantitativ durch die Magnetisierung erfasst, die als Dipoldichte das magnetische Moment pro Volumen beschreibt:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \tag{8.35}$$

Bei dieser Definition der Magnetisierung wird ein Kontinuum angenommen. In Wirklichkeit aber werden die gebundenen Ströme in diskreten Atomen und Molekülhüllen induziert. In der makroskopischen Magnetostatik geht man daher analog zur makroskopischen Elektrostatik vor und betrachtet Systemgrößen, die im Vergleich zur atomaren Skala über große aber im Vergleich zur Systemgröße kleine räumliche Skalen ausgemittelte Größen zu verstehen sind. Hierzu gehen wir von der bekannten mikroskopischen Magnetostatik aus und zeigen, wie sich hieraus die makroskopische Magnetostatik ableiten lässt. Das folgende Schema fasst dabei die Grundidee des Vorgehens prägnant zusammen:




## 8.2.1 Multipolentwicklung:

Eine mikroskopische Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ führt zum Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{8.36}$$

Diese Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ soll räumlich begrenzt sein

$$\vec{j}(\vec{r}\,') \begin{cases} \neq \vec{0} & ; \ |\vec{r}\,'| < R \\ = \vec{0} & ; \ |\vec{r}\,'| > R \end{cases} \tag{8.37}$$

und wir sind am Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ an einem Ort $\vec{r}$ weit weg vom Bereich der Stromverteilung interessiert, so dass (8.4) gilt. Aufgrund der Taylor-Reihe

(8.5) geht dann (8.36) über in

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\frac{1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \ldots \qquad (8.38)$$

Zur Berechnung des ersten Volumenintegrales berücksichtigen wir die Kontinuitätsgleichung der Magnetostatik (3.18) und betrachten das Integral

$$\int dV'\, j_k(\vec{r}\,') \overset{(3.18)}{=\!=} \int dV' \left[ j_k(\vec{r}\,') + x_k'\, \mathrm{div}'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\right] = \int dV'\, \mathrm{div}' \left[ x_k'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\right] \qquad (8.39)$$

Aufgrund des Satzes von Gauß und der Annahme (8.37) folgt aus (8.39)

$$\int dV'\, \vec{j}(\vec{r}\,') = \vec{0} \qquad (8.40)$$

so dass der erste Term in (8.38) verschwindet. Zur Berechnung des zweiten Volumenintegrals in (8.38) verwenden wir erneut die Kontinuitätsgleichung der Magnetostatik und erhalten

$$\int dV'\, x_k' j_i(\vec{r}\,') \overset{(3.18)}{=\!=} \int dV' \left[ x_k' j_i(\vec{r}\,') + x_k' x_i'\, \mathrm{div}'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\right] = \int dV'\, x_k'\, \mathrm{div}' \left[ x_i'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\right]$$

$$= \int dV'\, \mathrm{div}' \left[ x_k' x_i'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\right] - \int dV'\, x_i' j_k(\vec{r}\,') \overset{\text{Gauß}}{=\!=} -\int dV'\, x_i' j_k(\vec{r}\,') \qquad (8.41)$$

Multipliziert man (8.41) mit $x_k$, so folgt die Identität

$$\int dV'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' = -\int dV'\, \vec{r}\,' \left[ \vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')\right] \qquad (8.42)$$

Hieraus folgern wir

$$\int dV'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' = \frac{1}{2}\int dV' \left\{ \vec{j}(\vec{r}\,')\, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' - \vec{r}\,' \left[ \vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')\right] \right\} \qquad (8.43)$$

so dass wir mit der Vektoridentität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad (8.44)$$

schließlich erhalten

$$\int dV'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' = \frac{1}{2}\int dV' \left[ \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')\right] \times \vec{r} \qquad (8.45)$$

Einsetzen von (8.45) in (8.38) führt auf das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \ldots \qquad (8.46)$$

Hierbei bezeichnet $\vec{m}$ das magnetische Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int dV'\, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,') \qquad (8.47)$$

der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}\,')$. Höhere Multipolmomente in der Entwicklung (8.46) spielen in der Regel keine Rolle und können deshalb vernachlässigt werden.

## 8.2.2 Gebundene Ströme:

Betrachten wir nun ein Medium, dann führen die gebundenen Ströme in den Atomen und Molekülen zu Dipolbeiträgen der Form (8.46) im Vektorpotential. Summieren wir über all diese Vektorpotentialbeiträge der jeweiligen magnetischen Dipolmomente $\vec{m}_k$ an den Orten $\vec{r}_k$ auf, so erhalten wir

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \frac{\vec{m}_k \times (\vec{r}-\vec{r}_k)}{|\vec{r}-\vec{r}_k|^3} \tag{8.48}$$

All diese diskreten Dipolbeiträge lassen sich nun in eine Kontinuumsform überführen

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{8.49}$$

wobei formal die Magnetisierung als Volumendichte der magnetischen Dipolmomente eingeführt wurde:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_k \vec{m}_k\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) \tag{8.50}$$

Das Resultat (8.49) stellt zwar schon das gesuchte Ergebnis dar, da es den Einfluß der gebundenen Ströme auf das Vektorpotential beschreibt. Man kann aber (8.49) noch weiter umformen, um ein physikalisch intuitiveres Resultat zu erzielen.

Hierzu setzen wir (8.12) in (8.49) ein:

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \, \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{8.51}$$

Aufgrund der vektoranalytischen Identität

$$\operatorname{rot}\left[\vec{M}(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\right] = \operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \times \vec{M}(\vec{r}) + \varphi(\vec{r}) \operatorname{rot}\vec{M}(\vec{r}) \tag{8.52}$$

geht (8.51) über in

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \left\{ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \operatorname{rot}\vec{M}(\vec{r}') - \operatorname{rot}'\left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] \right\} \tag{8.53}$$

Im zweiten Term wenden wir nun den Satz von Gauß in der Form (1.46) an. Dabei vernachlässigen wir auch hier nicht den resultierenden Oberflächenterm, da wir von einem endlichen Volumen $V$ ausgehen. Damit erhalten wir aus (8.53)

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\operatorname{rot}'\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \times d\vec{F}' \tag{8.54}$$

Der erste Term entspricht dem Vektorpotential einer Volumenstromdichte

$$\vec{J}_g(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{M}(\vec{r}) \tag{8.55}$$

Hierbei gilt die statische Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{J}_g(\vec{r}) = 0 \tag{8.56}$$

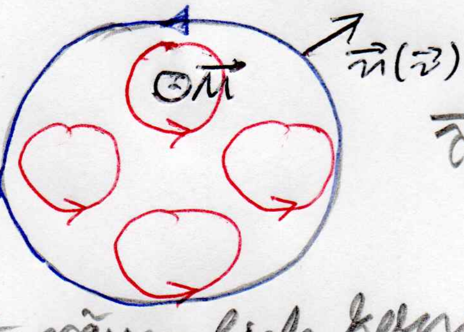
Der zweite Term entspricht dem Vektorpotential einer Oberflächenstromdichte

$$\vec{\tau}_g(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \vec{n}(\vec{r}) \tag{8.57}$$

Dabei stammen die Beiträge (8.55) und (8.57) von den gebundenen Strömen.

Auch hier kann man analog zur Elektrostatik verstehen, wie die gebundenen Ströme aufgrund der Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$ entstehen. Hierzu stellen wir uns $\vec{M}(\vec{r})$ aus kleinen magnetischen Dipolmomenten zusammengesetzt vor, die von Kreisströmen gebildet werden. Ist $\vec{M}(\vec{r}) = \text{const.}$, so kompensieren sich die entsprechenden Kreisströme zwar im Inneren des Materials, nicht aber an der Oberfläche. Dies erklärt die Entstehung der Oberflächenstromdichte (8.57):

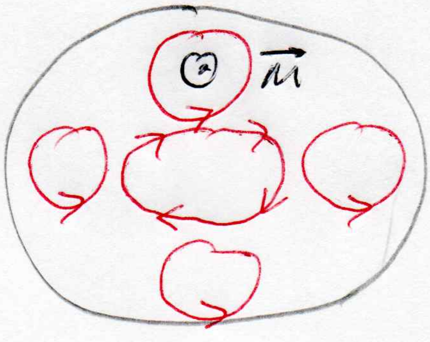
Oberflächen-stromdichte




$$\vec{\tau}_g(\vec{r}) = \vec{M} \times \vec{n}(\vec{r})$$

Ist $\vec{M}(\vec{r})$ aber nicht räumlich konstant, so kompensieren sich die Kreisströme der einzelnen magnetischen Dipole nicht mehr im Volumen und es entsteht die Volumenstromdichte (8.55):

Volumen-stromdichte




$$\vec{J}_g(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{M}(\vec{r})$$

Mit Hilfe von (8.55) und (8.57) geht (8.54) in das Endergebnis für das Vektorpotential gebundener Ströme über:

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V dV' \, \frac{\vec{j}_g(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial V} dF' \, \frac{\vec{\tau}_g(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (8.58)$$

## 8.2.3 Entmagnetisierung:

Wir betrachten nun den Spezialfall einer räumlich konstanten Magnetisierung, d.h. $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{M}$. Dann folgt aus (8.54)

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial V} \frac{\vec{M} \times d\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (8.59)$$

Für die entsprechende magnetische Induktion

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}_g(\vec{r}) \qquad (8.60)$$

erhalten wir dann mit der vektoranalytischen Identität (8.52) das Zwischenergebnis

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial V} \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \times \left[\vec{M} \times d\vec{F}(\vec{r}\,')\right] \qquad (8.61)$$

Aufgrund der Vektoridentität (8.44) reduziert sich (8.61) auf

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial V}\left\{\left[\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cdot d\vec{F}(\vec{r}\,')\right]\vec{M} - d\vec{F}(\vec{r}\,')\left[\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cdot\vec{M}\right]\right\} \qquad (8.62)$$

Der erste Beitrag in (8.62) läßt sich analog zu (8.25)-(8.27) berechnen und ergibt:

$$\vec{B}_g^{(1)}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{M} \qquad (8.63)$$

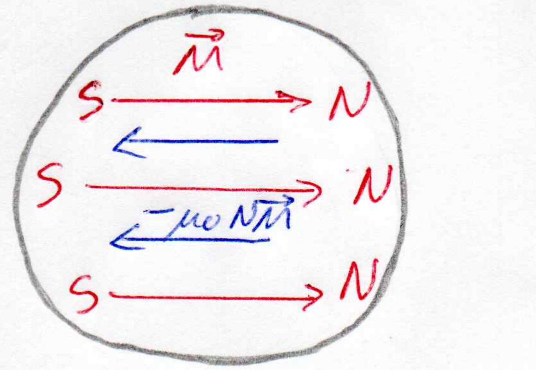
Der zweite Beitrag in (8.62) ist das sogenannte Streufeld

$$\vec{B}_g^{(2)}(\vec{r}) = -\mu_0 N \vec{M} \qquad (8.64)$$

wobei der Entmagnetisierungstensor $N$ mit dem Entelektrisierungstensor (8.22) übereinstimmt. Die magnetische Induktion einer räumlich konstanten Magnetisierung folgt aus (8.63) und (8.64) zu

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = \mu_0(1-N)\vec{M} \qquad (8.65)$$

Die Magnetisierung zeigt immer vom Süd- zum Nordpol. Eine homogen magnetisierte Probe führt deshalb, abhängig von der Probenform, zu einem Streufeld (8.64), das dem Magnetisierungsbeitrag (8.63) entgegen wirkt.



## 8.2.4 Magnetische Feldstärke:

Im Allgemeinen liegen in einem Medium sowohl freie als auch gebundene Ströme vor. Die gesamte Stromdichte lautet daher

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_f(\vec{r}) + \vec{j}_g(\vec{r}) \qquad (8.66)$$

wobei die gebundene Stromdichte durch (8.55) gegeben ist. Die Stromdichte (8.66) erzeugt nach dem Ampère-Gesetz eine magnetische Induktion:

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \qquad (8.67)$$

Einsetzen von (8.55) und (8.66) in (8.67) führt auf

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}_f(\vec{r}) + \mu_0 \operatorname{rot} \vec{M}(\vec{r}) \qquad (8.68)$$

Wir definieren daher die magnetische Feldstärke

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r}) \qquad (8.69)$$

Dann erhalten wir ein Ampère-Gesetz für $\vec{H}(\vec{r})$, das nur die freien Ströme beinhaltet:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_f(\vec{r}) \qquad (8.70)$$

Demnach ist die Wirbeldichte der magnetischen Feldstärke durch die freien Ströme gegeben. Offenbar hat diese Umformulierung des Ampère-Gesetzes keine Auswirkung darauf, dass keine magnetischen Monopole existieren. Es gilt also nach wie vor

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \qquad (8.71)$$

Bildet man die Divergenz von (8.69), so folgt mit (8.71)

$$\operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{M}(\vec{r}) \qquad (8.72)$$

d.h. die Wirbeldichte der magnetischen Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$ ist durch die Wirbeldichte der Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$ gegeben. Nach dem Helmholtzschen Vektorzerlegungssatz ist damit die magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$ nicht nur durch die freie Stromdichte $\vec{j}_f(\vec{r})$ sondern auch durch die Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$ bestimmt.

## 8.3 Makroskopische Elektrodynamik:

Wir bringen nun die makroskopische Elektrostatik und die makroskopische Magnetostatik zusammen und erweitern diese noch dynamisch. Damit erhalten wir die makroskopische Elektrodynamik, die elektrodynamische Phänomene in Materie beschreibt.

## 8.3.1 Elektrisches Feld:

Die in Abschnitt 8.1.2 entwickelte Theorie gebundener Ladungen im Rahmen der makroskopischen Elektrostatik läßt sich Schritt für Schritt problemlos dynamisch erweitern. So wird z.B. die statische Polarisation (8.11) dadurch dynamisch erweitert, dass sowohl die elektrischen Dipolmomente $\vec{p}_k(t)$ als auch deren Positionen $\vec{r}_k(t)$ zeitabhängig sein können:

$$\vec{P}(t) = \sum_k \vec{p}_k(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_k(t)) \tag{8.73}$$

Am Ende führt diese dynamische Erweiterung dazu, dass auch die Volumenladungsdichte der gebundenen Ladungen (8.16) zeitabhängig wird:

$$\rho_g(\vec{r},t) = -\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r},t) \tag{8.74}$$

Deshalb lassen sich die Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho_f(\vec{r},t)+\rho_g(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \tag{8.75}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{8.76}$$

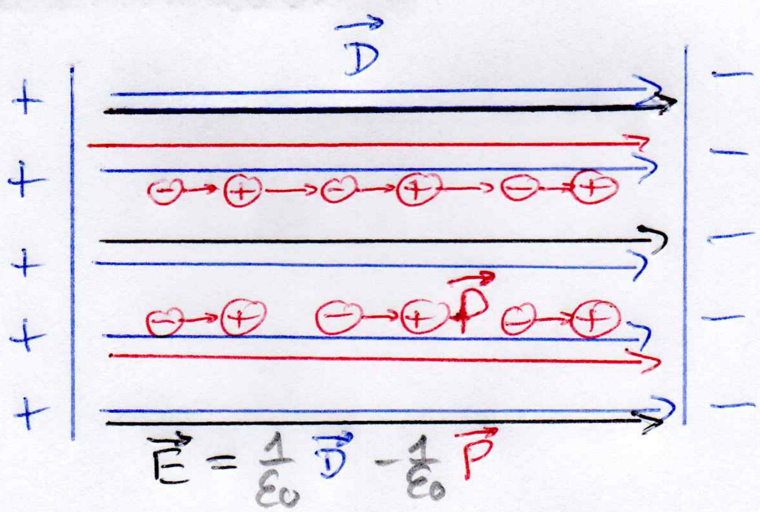
analog zu Abschnitt 8.1.4 in Materie umformulieren. Hierzu wird analog zu (8.31) das zeitabhängige dielektrische Verschiebungsfeld eingeführt

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t) \tag{8.77}$$

so dass sich (8.75) aufgrund von (8.74) reduziert auf

$$\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \rho_f(\vec{r},t) \tag{8.78}$$

während das Induktionsgesetz (8.76) nach wie vor gültig bleibt. Damit haben wir auch im zeitabhängigen Fall beschrieben, wie das elektrische Feld freier Ladungen durch eine Polarisation abgeschwächt wird:



## 8.3.2 Magnetisches Feld:

Demgegenüber ist die dynamische Erweiterung der makroskopischen Magnetostatik aufwändiger. Das fängt schon bei der Multipolentwicklung an, wo wir statt (8.38) zunächst

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \, \vec{j}(\vec{r}\,',t)\,\frac{1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \, \vec{j}(\vec{r}\,',t)\,\frac{\vec{r}\,\vec{r}\,'}{r^3} + \dots \qquad (8.79)$$

erhalten. Das erste Volumenintegral muß jetzt nämlich erneut berechnet werden, da statt der statischen Kontinuitätsgleichung (3.18) nun die volle Kontinuitätsgleichung (6.3) gilt. Analog zu (7.10)–(7.13) erhalten wir

$$\int dV' \, \vec{j}(\vec{r}\,',t) = \frac{\partial \vec{p}(t)}{\partial t} \qquad (8.80)$$

mit dem zeitabhängigen elektrischen Dipolmoment (7.14). Im Unterschied dazu stellt sich aber heraus, dass die Überlegungen (8.41)–(8.45) zum zweiten Volumenintegral auch im dynamischen Fall gültig sind. Daher erhalten wir statt (8.46) nun

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\partial \vec{p}(t)}{\partial t}\,\frac{1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}(t)\times\vec{r}}{r^3} + \dots \qquad (8.81)$$

mit dem zeitabhängigen magnetischen Dipolmoment

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2}\int dV' \, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,',t) \qquad (8.82)$$

Aufbauend darauf läßt sich dann analog zu Abschnitt 8.2.2 die Theorie gebundener Ströme dynamisch erweitern. Dabei erhalten wir z.B. statt (8.48) nun

$$\vec{A}_g(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_k \frac{\partial \vec{p}_k(t)}{\partial t}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_k(t)|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_k \frac{\vec{m}_k(t)\times[\vec{r}-\vec{r}_k(t)]}{|\vec{r}-\vec{r}_k(t)|^3} \qquad (8.83)$$

und entsprechend statt (8.49)

$$\vec{A}_g(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \left\{ \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}\,',t)}{\partial t}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{M}(\vec{r}\,',t)\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \right\} \qquad (8.84)$$

wobei die Polarisation (8.73) und die dynamische Verallgemeinerung der statischen Magnetisierung (8.50) auftritt:

$$\vec{M}(\vec{r},t) = \sum_k \vec{m}_k(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_k(t)) \qquad (8.85)$$

Aus analogen Überlegungen wie zur makroskopischen Magnetostatik erhalten wir aus (8.84) schließlich das Ergebnis, dass die Volumenstromdichte der gebundenen Ströme nun aus zwei Beiträgen besteht:

$$\vec{j}_g(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r},t)}{\partial t} + \mathrm{rot}\, \vec{M}(\vec{r},t) \qquad (8.86)$$

Dabei ist zu beachten, dass gebundene Volumenladungs- und -stromdichte (8.74) und (8.86) einer Kontinuitätsgleichung genügen:

$$\frac{\partial \rho_g(\vec{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j}_g(\vec{r},t) = 0 \qquad (8.87)$$

Und schließlich lassen sich am Ende auch die Maxwell-Gleichungen für die magnetische Induktion

$$\mathrm{div}\, \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad (8.88)$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \left[\vec{j}_f(\vec{r},t) + \vec{j}_g(\vec{r},t)\right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (8.89)$$

analog zu Abschnitt 8.2.4 in Materie umschreiben. Hierzu führen wir analog zu (8.69) die zeitabhängige magnetische Feldstärke ein

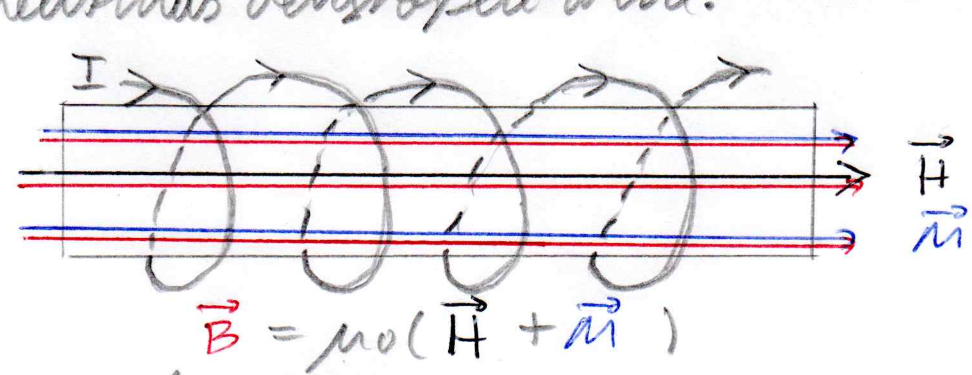
$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r},t) - \vec{M}(\vec{r},t) \qquad (8.90)$$

Einsetzen von (8.77), (8.86) und (8.90) in (8.89) führt mit Hilfe von (4.17) auf

$$\mathrm{rot}\,(\mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_f + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0\, \mathrm{rot}\, \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{j}_f(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (8.91)$$

während (8.88) auch für gebundene Ladungen und Ströme gültig bleibt. Damit haben wir auch im zeitabhängigen Fall beschrieben, wie das magnetische Feld freier Ströme durch Magnetisierung der Materie bei Paramagnetismus vergrößert wird:




$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

## 8.3.3 Zusammenfassung:

Die Elektrodynamik in Materie besteht aus den beiden homogenen Maxwell-Gleichungen (8.76) und (8.88) sowie den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen (8.78) und (8.90). Dabei sind die Hilfsfelder $\vec{D}(\vec{r},t)$ und $\vec{H}(\vec{r},t)$

durch die freien Ladungen und Ströme bestimmt. Die physikalisch relevanten Felder sind aber $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$, da sie eine Lorentz-Kraft (4.18) auf ruhende bzw. bewegte Ladungen ausüben. Gemäß (8.77) und (8.90) sind aber $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ erst dann bekannt, wenn man die Polarisation $\vec{P}(\vec{r},t)$ und die Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r},t)$ der Materie kennt.

### 8.3.4 Materialgleichungen:

Um die Maxwell-Gleichungen in Materie anwenden zu können, benötigt man Kenntnisse über $\rho_f(\vec{r},t)$, $\vec{j}_f(\vec{r},t)$, $\vec{P}(\vec{r},t)$ und $\vec{M}(\vec{r},t)$, die im Rahmen von Materialgleichungen formuliert werden. Im allgemeinen sind diese Materialgleichungen sehr kompliziert. Für viele Stoffe gelten aber einfache lineare Materialgleichungen, die wir nun zusammenstellen:

- Normale Leiter sind elektrisch neutral
$$\rho_f(\vec{r},t) = 0 \tag{8.92}$$
und erfüllen das Ohmsche Gesetz
$$\vec{j}_f(\vec{r},t) = \sigma\,\vec{E}(\vec{r},t) \tag{8.93}$$
Hierbei beschreibt $\sigma$ die Leitfähigkeit des Leiters.
- Dielektrika (Isolatoren) haben die Eigenschaft, dass deren Polarisation $\vec{P}(\vec{r},t)$ proportional zur elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r},t)$ ist
$$\vec{P}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\,\chi_e\,\vec{E}(\vec{r},t) \tag{8.94}$$
wobei man $\chi_e$ als elektrische Suszeptibilität bezeichnet. Damit geht (8.77) über in
$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\vec{E}(\vec{r},t) \tag{8.95}$$
wobei
$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \tag{8.96}$$
die relative Dielektrizitätszahl darstellt.
- Magnetische Substanzen haben die Eigenschaft, dass deren Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r},t)$ proportional zur magnetischen Feldstärke $\vec{H}(\vec{r},t)$ ist
$$\vec{M}(\vec{r},t) = \chi_m\,\vec{H}(\vec{r},t) \tag{8.97}$$
wobei $\chi_m$ die magnetische Suszeptibilität darstellt. Damit geht (8.90) über in

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \mu_r \vec{H}(\vec{r},t) \qquad (8.98)$$

mit der relativen Permeabilitätskonstanten

$$\mu_r = 1 + \chi_m \qquad (8.99)$$

Ist $\chi_m > 0$ spricht man vom Paramagnetismus, ist dagegen $\chi_m < 0$ vom Diamagnetismus. Die relative Permeabilitätskonstante $\mu_r$ eines Stoffes gibt an, auf das Wievielfache sich die magnetische Flußdichte $\vec{B}(\vec{r},t)$ gegenüber dem Vakuum erhöht, wenn man den Feldbereich mit dem Stoff ausfüllt. Die meisten Stoffe beeinflussen das Magnetfeld kaum. Ausnahmen sind Eisen, Kobalt, Nickel, deren Ferromagnetismus die Phänomene Hysterese und Remanenz zeigen:

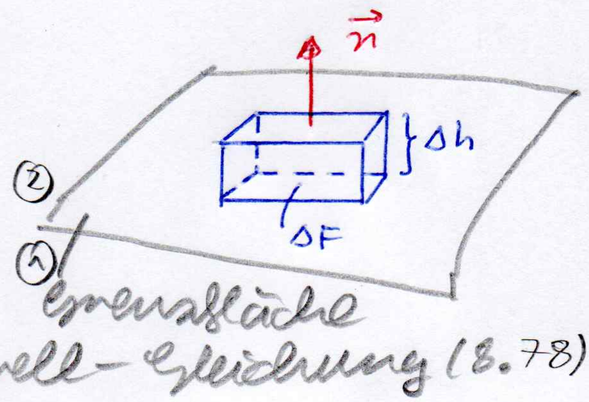
| Stoff | $\mu_r$ |
|---|---|
| Luft | 1,0000004 |
| Kupfer | 0,99949 |
| Gußeisen | 8000 |

## 8.4 Grenzflächenbedingungen:

Zu den Maxwellschen Differentialgleichungen gehören die Randbedingungen an den Grenzflächen zweier Medien, wie z.B. Luft-Wasser oder Dielektrikum-Kondensatorplatten. Erst wenn das gesamte Randwertproblem bekannt ist, sind die elektromagnetischen Felder eindeutig festgelegt.

### 8.4.1 Gaußscher Satz:

Wir betrachten einen Quader mit einer infinitesimalen Höhe $\Delta h$, einer Fläche $\Delta F$ und dem Volumen $\Delta V = \Delta h \cdot \Delta F$ längs einer Grenzfläche mit Normalenvektor $\vec{n}$. Dann folgt aus der Maxwell-Gleichung (8.78) und dem Gaußschen Satz




$$\oint_{\partial \Delta V} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \int_{\Delta V} \rho_f \, dV = \Delta Q \qquad (8.100)$$

Wir werten nun (8.100) im Limes $\Delta h \to 0$ aus. Zum einen kann man beim Oberflächenintegral den Mantelanteil vernachlässigen und sich auf den Boden- und Deckenanteil beschränken:

$$\Delta F \, \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \Delta Q \qquad (8.101)$$

Zum anderen kann man die Ladung $\Delta Q$ des Quaders aus der Flächenladungsdichte $\sigma_F$ der Grenzfläche berechnen:

$$\Delta Q = \sigma_F \, \Delta F \qquad (8.102)$$

Aus (8.101) und (8.102) gewinnen wir damit eine Sprungbedingung für die Normalenkomponente der dielektrischen Verschiebung:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_F \qquad (8.103)$$

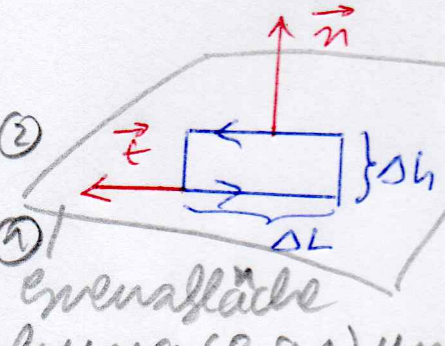
Ganz entsprechende Überlegungen mit der Maxwell-Gleichung (8.88) führen für die magnetische Flußdichte $\vec{B}$ zum Ergebnis

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \qquad (8.104)$$

d.h. deren Normalenkomponente ist an der Grenzfläche stetig.

## 8.4.2 Stokesscher Satz:

Wir betrachten ein Rechteck mit einer infinitesimalen Höhe $\Delta h$, einer Länge $\Delta L$ und einer Fläche $\Delta F = \Delta h \, \Delta L$ längs der Grenzfläche mit dem Tangentialvektor $\vec{t}$.




Dann folgt aus der Maxwell-Gleichung (8.91) und dem Stokesschen Satz

$$\oint_{\partial \Delta F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{\Delta F} \vec{j} \cdot d\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta F} \vec{D} \cdot d\vec{F} \qquad (8.105)$$

Wir werten nun (8.105) im Limes $\Delta h \to 0$ aus:

$$\oint_{\partial \Delta F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \Delta L \, \vec{t} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \qquad (8.106)$$

$$\int_{\Delta F} \vec{j} \cdot d\vec{F} = \Delta I \qquad (8.107)$$

$$\int_{\Delta F} \vec{D} \cdot d\vec{F} \sim \Delta h \to 0 \qquad (8.108)$$

Dabei bezeichnet $\Delta I$ den Strom durch das Rechteck im

Limes $\Delta h \to 0$. Hierzu führen wir eine Oberflächen-stromdichte $i_g = \Delta I / \Delta L$ ein. Sie ist die Komponente eines Vektors $\vec{i}_g$, der sowohl senkrecht zu $\vec{t}$ als auch senkrecht zu $\vec{n}$ ist:

$$\Delta I = \Delta L \, \vec{i}_g \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \tag{8.109}$$

Demnach folgt aus (8.105)–(8.109)

$$\vec{t} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_g \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \tag{8.110}$$

Hierbei stellen $\vec{t}$ und $\vec{n} \times \vec{t}$ zwei zueinander senkrechte Tangentialvektoren der Grenzfläche dar, d.h. es gilt auch

$$(\vec{n} \times \vec{t}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_g [\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{t})] = -\vec{i}_g \vec{t} \tag{8.111}$$

Beide Gleichungen (8.110) und (8.111) lassen sich zusammenfassen durch:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_g \tag{8.112}$$

In der Tat erhält man (8.110) und (8.111), wenn man (8.112) skalar mit $\vec{n} \times \vec{t}$ und $\vec{t}$ multipliziert:

$$(\vec{n} \times \vec{t}) \cdot [\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \underbrace{[(\vec{n} \times \vec{t}) \times \vec{n}]}_{= -\vec{t}} = \vec{i}_g \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \quad \checkmark$$

$$\vec{t} \cdot [\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) = \vec{i}_g \cdot \vec{t} \quad \checkmark$$

Hierbei stellt (8.112) eine Grenzbedingung für die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke dar. Ganz entsprechende Überlegungen mit der Maxwell-Gleichung (8,76) führen für die elektrische Feldstärke zum Ergebnis

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \tag{8.113}$$

d.h. die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist stetig.