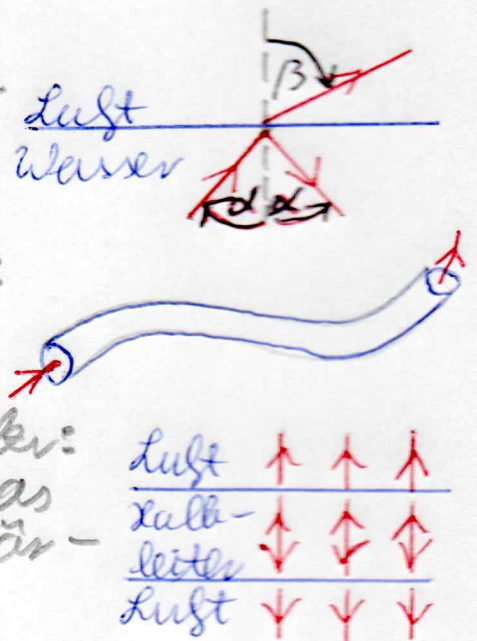


9 Elektromagnetische Wellen in Materie

Nachdem wir in Kapitel 7 die Erzeugung elektromagnetischer Wellen und in Kapitel 5 deren Ausbreitung im Vakuum besprochen haben, behandeln wir im vorliegenden Kapitel elektromagnetische Wellen in Materie. Wichtige Anwendungsbeispiele sind hierbei:

- Reflexion und Brechung von Licht: Licht, das auf die Grenzfläche zwischen zwei Materialien auftrifft, wird reflektiert und gebrochen.
- Fasern zur Telekommunikation: Elektromagnetische Wellen breiten sich entlang einer Faser aus.
- Halbleiterlaser in CD und DVD-Spieler: Innere Vielfachreflexionen hält das Licht im Halbleiter. Diese Lichtverstärkung ermöglicht den Laserbetrieb.



9.1 Telegraphengleichung:

Im folgenden betrachten wir eine homogene, isotrope, ruhende, ungeladene Materie. Es gelten dann die Materialgleichungen (8.92), (8.93), (8.95) und (8.95). Dabei verwenden wir zur Abkürzung die Größen

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (9.1)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (9.2)$$

9.1.1 Herleitung:

Setzen wir diese Materialgleichungen in die Maxwell-Gleichungen (8.76), (8.78), (8.88) und (8.91) ein, so folgt:

$$(M1) \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.3)$$

$$(M2) \operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.4)$$

$$(M3) \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (9.5)$$

$$(M4) \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (9.6)$$

Es handelt sich hierbei um gekoppelte partielle Differentialgleichungen für die elektrische und die magnetische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Wir wenden nun

dieses Differentialgleichungssystem entkoppeln. Hierzu berechnen wir rot rot \vec{E} auf zweiweiße Weisen. Zum einen gilt

$$\text{rot rot } \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{(3.24)}{=} \text{grad div } \vec{E}(\vec{r}, t) - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{(9.3)}{=} -\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (9.7)$$

zum anderen erhalten wir

$$\text{rot rot } \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{(9.5)}{=} -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) \stackrel{(9.6)}{=} -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) - \epsilon_\mu \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (9.8)$$

Demnach genügt die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ der Telegrafengleichung

$$\left\{ \Delta - \epsilon_\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.9)$$

Entsprechend führt die Berechnung von rot rot $\vec{H}(\vec{r}, t)$ zum einen auf

$$\text{rot rot } \vec{H}(\vec{r}, t) \stackrel{(3.24)}{=} \text{grad div } \vec{H}(\vec{r}, t) - \Delta \vec{H}(\vec{r}, t) \stackrel{(9.4)}{=} -\Delta \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (9.10)$$

und zum anderen auf

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{H}(\vec{r}, t) &\stackrel{(9.6)}{=} \sigma \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &\stackrel{(9.5)}{=} \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \epsilon_\mu \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9.11)$$

so dass auch die magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r}, t)$ der Telegrafengleichung genügt:

$$\left\{ \Delta - \epsilon_\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.12)$$

9.1.2 Isolatoren ($\sigma = 0$):

Liegt ein Material vor, bei dem die Leitfähigkeit verschwindet, d.h. $\sigma = 0$ ist, so reduzieren sich die Telegrafengleichungen (9.9) und (9.12) auf die Wellengleichungen

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.13)$$

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.14)$$

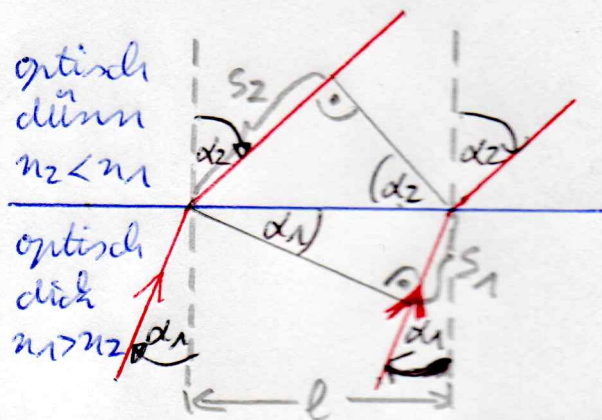
Dabei erhalten wir für die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in Materie

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \stackrel{(9.1), (9.2)}{=} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \stackrel{(4.17)}{=} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (9.15)$$

Das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten im Vakuum c und in Materie c' bezeichnet man als Brechungsindex

$$n = \frac{c}{c'} \stackrel{(9.15)}{=} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (9.16)$$

Treffen zwei Materialien mit unterschiedlichen Brechungsindizes n_1 und n_2 aufeinander, so kommt es nach Durchgang zu einer Brechung ebener Wellen. Aufgrund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten $c_1 = c/n_1$ und $c_2 = c/n_2$ ver-



ändern während der Zeit t die unterschiedlichen Strecken $s_1 = c_1 t = l \sin \alpha_1$ und entsprechend $s_2 = c_2 t = l \sin \alpha_2$ durchlaufen. Dieses Verhältnis s_1/s_2 ergibt sich zu

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (9.17)$$

Bei (9.17) handelt es sich um das Snelliussche Brechungsgesetz. Aus $n_1 > n_2$ folgt unmittelbar $\alpha_1 < \alpha_2$, d.h. ebene Wellen haben im optisch dichteren Medium den kleineren Brechungswinkel.

Die Maxwell'sche Relation (9.16) für den Brechungsindex n ist für Frequenzen bis ins Infrarot, d.h. für Mikrowellen, sehr gut bestätigt. Sie versagt aber im optischen, sichtbaren Bereich bei vielen Materialien. Beispielsweise ist bei Wasser $\mu_r \approx 1$, $\epsilon_r \approx 81$, so dass man $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx 9$ erhält, der gemessene Brechungsindex liegt aber bei $n \approx 1,33$. Dies liegt daran, dass bei optischen Frequenzen $\omega \approx 10^{15} \text{ 1/s}$ die Elektronen im Medium dem schnell oszillierenden Lichtfeld hinterhinken, sodass ϵ_r kleiner als der statische Wert ist. In diesem Fall muss man also die Frequenzabhängigkeit der Elektronenpolarisation berücksichtigen, was zu einer frequenzabhängigen Funktion $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$ führt.

9.1.3 Material mit endlicher Leitfähigkeit

Wir untersuchen nun den Fall $\sigma > 0$ und machen einen Ansatz für ebene, monochromatische Wellen, die den Telegraphengleichungen (9.9) und (9.12)

genügen:
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.18)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.19)$$

Einsetzen von (9.18), (9.19) in (9.9), (9.10) ergibt

$$\{ -\vec{k}^2 + \epsilon \mu \omega^2 + i \omega \mu \sigma \} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.20)$$

$$\{ -\vec{k}^2 + \epsilon \mu \omega^2 + i \omega \mu \sigma \} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.21)$$

Für nicht verschwindende Amplitudenvektoren \vec{E}_0 , \vec{H}_0 lesen wir aus (9.20), (9.21) eine komplexe Dispersionsrelation ab

$$\vec{k}^2 = \omega^2 \epsilon \mu \left\{ 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right\} \quad (9.22)$$

Das bedeutet, dass (9.18), (9.19) nur dann Lösungen von (9.9), (9.12) sind, wenn Kreisfrequenz ω und Wellenvektor \vec{k} der komplexen Dispersionsrelation (9.22) genügen.

Setzen wir andererseits den Ansatz (9.18), (9.19) in die Maxwell-Gleichungen (9.3) - (9.6) ein, so folgt

$$(M1) \quad \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.23)$$

$$(M2) \quad \vec{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.24)$$

$$(M3) \quad \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu \omega \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (9.25)$$

$$(M4) \quad \vec{k} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = (-i\sigma - \epsilon \omega) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (9.26)$$

Nach (9.23), (9.24) sind die elektromagnetischen Wellen in Materie wie im Vakuum Transversalwellen. Außerdem lesen wir aus (9.25), (9.26) ab, dass \vec{k} , $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ in Materie wie auch im Vakuum ein Rechtssystem bilden. Aber die für $\sigma > 0$ komplexe Beziehung (9.26) führt dazu, dass $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{H}(\vec{r}, t)$ nicht mehr phasengleich sind.

9.1.4 Komplexe Dispersionsrelation:

Wir untersuchen nun die physikalischen Konsequenzen der komplexen Dispersionsrelation (9.22). Zuvor definieren wir in Analogie zu (9.16) einen komplexen Brechungsindex

$$N = \frac{c}{c'} \quad (9.27)$$

für den wir durch Vergleich mit (9.22) das Ergebnis

$$N = \sqrt{\epsilon \mu} \cdot \sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \omega}} \quad (9.28)$$

erhalten. Wir zerlegen den komplexen Brechungs-

index N in dessen Realteil, den Brechungsindex n ,
und dessen Imaginärteil, den Absorptionskoeffi-
zienten κ :

$$N = n + i\kappa \quad (9.29)$$

Aus (9.28) und (9.29) folgen dann zwei Gleichungen
für die beiden Unbekannten n und κ :

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon_r \mu_r \quad (9.30)$$

$$2n\kappa = \epsilon_r \mu_r \cdot \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \quad (9.31)$$

Eliminieren wir κ bzw. n durch (9.31), so ergeben
sich aus (9.30) quadratische Gleichungen für n^2 bzw.
 κ^2 mit den Lösungen

$$n^2 = \epsilon_r \mu_r \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}}{2} \quad (9.32)$$

$$\kappa^2 = \epsilon_r \mu_r \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}}{2} \quad (9.33)$$

Im Fall $\sigma \rightarrow 0$ muss aber $n^2 \rightarrow \epsilon_r \mu_r$ und $\kappa^2 \rightarrow 0$ ge-
hen. Deshalb erhalten wir schließlich für den Bre-
chungsindex

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2 + 1}{2}} \quad (9.34)$$

und für den Absorptionskoeffizienten

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2 - 1}{2}} \quad (9.35)$$

9.1.5 Ausbreitung in x-Richtung:

Wir beschränken uns in der Diskussion der Einfachheit
halber nun auf eine ebene monochromatische Welle,
(9.18), (9.19), die sich in x-Richtung ausbreitet. Auf-
grund von $\vec{k} = k \vec{e}_x$ erhalten wir dann

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (9.36)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (9.37)$$

Aus (9.22), (9.27) und (9.29) lesen wir ab, dass der Be-
trag des Wellenvektors komplex ist:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) + i \frac{\omega}{c} \kappa(\omega) \quad (9.38)$$

Einsetzen von (9.38) in (9.36), (9.37) führt auf

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i \frac{\omega}{c} n(\omega) [x - c(\omega)t]} e^{-\frac{\kappa(\omega)}{c} x} \quad (9.39)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i \frac{\omega}{c} n(\omega) [x - c(\omega)t]} e^{-\frac{\kappa(\omega)}{c} x} \quad (9.40)$$

Das bedeutet, dass sich die ebene monochromatische Welle mit der frequenzabhängigen Geschwindigkeit

$$c(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} \stackrel{(9.34)}{=} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \sqrt{\frac{2}{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2 + 1}} \quad (9.41)$$

ausbreitet. Außerdem wird sie exponentiell gedämpft mit der frequenzabhängigen Eindringtiefe

$$d(\omega) = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\lambda(\omega)} \stackrel{(9.35)}{=} \frac{c}{\omega \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \sqrt{\frac{2}{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2 - 1}} \quad (9.42)$$

Man bezeichnet dieses exponentiell gedämpfte Eindringen einer elektromagnetischen Welle in einen Leiter als Skin-Effekt und die Eindringtiefe als Skin-Tiefe. Dies hat zum einen zur Folge, dass sich elektromagnetische Felder durch gut leitende Abschirmbleche abschirmen lassen. Zum anderen bedeutet dies, dass Wechselströme in einer Tiefe $d(\omega)$ am Rand von guten Leitern fließen, so dass im Inneren praktisch kein Strom fließt.

9.1.6 Beispiel:

Wir betrachten als konkretes Beispiel einen guten Leiter wie Kupfer und kleine Frequenzen, so dass

$$\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \gg 1$$

ist. Dann erhalten wir aus (9.34) und (9.35)

$$n(\omega) = \lambda(\omega)$$

so dass die Geschwindigkeit (9.41) durch

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 \omega}{\mu_2 \sigma}} c \quad (9.45)$$

und die Eindringtiefe (9.42) durch

$$d(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega \mu_2}} \quad (9.46)$$

gegeben sind. Im Falle von Kupfer mit $\mu_2 \approx 1$ und $\sigma \approx 5,88 \cdot 10^7 \text{ A/Vm}$ ergeben sich die Zahlenwerte

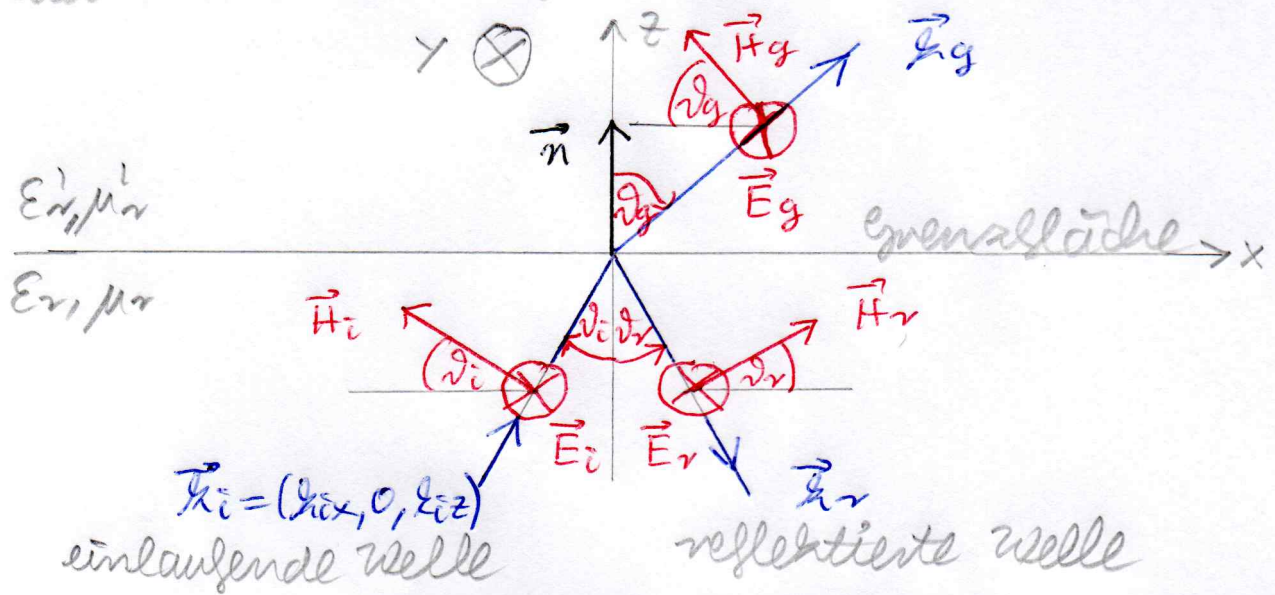
$\lambda = \frac{2\pi c(\omega)}{\omega}$	1 cm	10 km
ω	$2 \cdot 10^{11} \text{ 1/s}$	$2 \cdot 10^5 \text{ 1/s}$
$d(\omega)$	$0,37 \mu\text{m}$	$0,37 \text{ mm}$

9.2 Reflexion und Brechung:

Da Licht elektromagnetische Wellen darstellt, steckt letztendlich die gesamte Optik in den Maxwell-Gleichungen. Im folgenden untersuchen wir, wie man das Reflexions- und das Brechungsgesetz aus den Maxwell-Gleichungen systematisch ableiten kann. Dabei werden auch die Amplituden und die Intensitäten von reflektiertem und gebrochenem Strahl berechnet. Die dabei gewonnenen Ergebnisse sind wichtige Grundlagen z. B. für die Herstellung von Spiegeln, Brillen oder aber dielektrischen Laserresonatoren, die in jedem CD- oder DVD-Spieler enthalten sind.

9.2.1 Ausgangssituation:

Wir betrachten eine einlaufende, ebene Welle, die an einer Grenzfläche zu einem anderen Medium teilweise reflektiert und teilweise gebrochen wird:



Dabei nehmen wir der Einfachheit halber $\sigma_f = 0$ und $\vec{j}_f = \vec{0}$ an, d. h. es sollen keine Oberflächenladungen und keine Oberflächenströme auf der Grenzfläche vorhanden sein. Ferner sollen beide Medien dielektrika sein, d. h. $\sigma = \sigma_l = 0$. Dann folgt aus (9.35) und (9.42), dass $\chi(z) = 0$ bzw. $d(z) = \infty$, d. h. die elektromagnetischen Wellen werden in beiden Medien nicht gedämpft. Betrachten wir optische Frequenzen, so können wir außerdem in guter Näherung $\mu_2 = \mu_1 = 1$ annehmen. Nach (9.16) sind dann die Brechungsindizes der beiden Medien durch

$$n = \sqrt{\epsilon_r},$$

$$n_l = \sqrt{\epsilon_r}$$

(9.47)

gegeben.

Ferner vernachlässigen wir, dass die Wellen in beiden Medien linear polarisiert sind und machen jeweils einen Ansatz für ebene Wellen:

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{i0} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} \quad (9.48)$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_{r0} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} \quad (9.49)$$

$$\vec{E}_g(\vec{r}, t) = \vec{E}_{g0} e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega_g t)} \quad (9.50)$$

Dabei gelten aufgrund von (9.15) und (9.22) die Dispersionsrelationen

$$\vec{k}_i^2 = \frac{\omega_i^2}{c^2} n^2, \quad \vec{k}_r^2 = \frac{\omega_r^2}{c^2} n^2, \quad \vec{k}_g^2 = \frac{\omega_g^2}{c^2} n_l^2 \quad (9.51)$$

9.2.2 Phasenfaktoren:

Wegen der obengemachten Annahmen gelten nach (8.103), (8.104) und (8.112), (8.113) die Grenzflächenbedingungen, dass $\vec{n} \cdot \vec{D}$, $\vec{n} \cdot \vec{B}$, $\vec{n} \times \vec{E}$, $\vec{n} \times \vec{H}$ in der Ebene $z=0$ stetig sein müssen. Dies hat zunächst für die Phasenfaktoren zur Folge, dass

$$e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)}|_{z=0} = e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}|_{z=0} = e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega_g t)}|_{z=0} \quad (9.52)$$

für alle t und für alle x, y erfüllt sein muss. Da (9.52) für alle t gelten soll, muss

$$\omega_i = \omega_r = \omega_g = \omega \quad (9.53)$$

erfüllt sein, so dass sich die Dispersionsrelationen in (9.51) vereinfachen

$$\vec{k}_i^2 = \vec{k}_r^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2, \quad \vec{k}_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_l^2 \quad (9.54)$$

Da (9.52) für alle x, y gelten soll, folgt mit $\vec{k}_i = (k_{ix}, 0, k_{iz})$

$$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{ry} y = k_{gx} x + k_{gy} y \quad (9.55)$$

Daraus folgt für allgemeine y

$$k_{ry} = k_{gy} = 0 \quad (9.56)$$

Dies bedeutet, dass alle drei Wellenvektoren $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_g$ in der xz -Ebene liegen, siehe Skizze auf Seite 87. Da (9.55) für alle x gelten soll, erhalten wir ferner

$$k_{ix} = |\vec{k}_i| \sin \varphi_i = k_{rx} = |\vec{k}_r| \sin \varphi_r = k_{gx} = |\vec{k}_g| \sin \varphi_g \quad (9.57)$$

Aus (9.54) und (9.57) lesen wir dann das Snelliussche Reflexionsgesetz ab, dass Einfallswinkel ϑ_i und Reflexionswinkel ϑ_r übereinstimmen:

$$\vartheta_i = \vartheta_r \quad (9.58)$$

Außerdem folgt aus (9.54) und (9.57) auch das Snelliussche Brechungsgesetz (9.17)

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_g} = \frac{|\vec{k}_g|}{|\vec{k}_i|} = \frac{n'}{n} \quad (9.59)$$

9.2.3 Amplituden:

Wir nehmen an, dass die ebenen Wellen wie in der Skizze auf Seite 87 geseigt polarisiert sind. Dann ist $\vec{n} \cdot \vec{E}_i = \vec{n} \cdot \vec{E}_r = \vec{n} \cdot \vec{E}_g = 0$, so dass wegen (8.95) die Stetigkeit von $\vec{n} \cdot \vec{D}$ in der Ebene garantiert ist. Aus der Stetigkeit von $\vec{n} \times \vec{E}$ in der Ebene $z=0$ folgt dann mit $\vec{E}_{i0} = E_{i0} \vec{e}_y$, $\vec{E}_{r0} = E_{r0} \vec{e}_y$, $\vec{E}_{g0} = E_{g0} \vec{e}_y$

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{g0} \quad (9.60)$$

Untersuchen wir entsprechend die Stetigkeit von $\vec{n} \cdot \vec{B}$ in der Ebene $z=0$, so erhalten wir wegen (8.98) eine Beziehung an die z -Komponente der magnetischen Feldstärke

$$H_{i0z} + H_{r0z} = H_{g0z} \quad (9.61)$$

Mit Hilfe der Winkel $\vartheta_i = \vartheta_r$ und ϑ_g geht (9.61) über

$$\text{in} \quad (H_{i0} + H_{r0}) \sin \vartheta_i = H_{g0} \sin \vartheta_g \quad (9.62)$$

Andererseits folgt aus der früher abgeleiteten Beziehung (9.25), da \vec{k}_i , \vec{E}_i und \vec{H}_i senkrecht aufeinander stehen

$$|\vec{k}_{i0}| E_{i0} \stackrel{(9.54)}{=} \frac{\omega}{c} n E_{i0} \stackrel{(9.25)}{=} \mu_0 \omega H_{i0} \Rightarrow H_{i0} = \frac{n}{c \mu_0} E_{i0} \quad (9.63)$$

Entsprechend gilt dann auch

$$H_{r0} = \frac{n}{c \mu_0} E_{r0}, \quad H_{g0} = \frac{n'}{c \mu_0} E_{g0} \quad (9.64)$$

Mit (9.63) und (9.64) reduziert sich (9.62) auf

$$n(E_{i0} + E_{r0}) \sin \vartheta_i = n' E_{g0} \sin \vartheta_g \quad (9.65)$$

Aufgrund des Snelliusschen Brechungsgesetzes (9.59) geht dann (9.65) über in (9.60) und stellt daher keine

neue Bedingung dar. Somit müssen wir nun noch die Stetigkeit von $\vec{n} \times \vec{H}$ an der Ebene $z=0$ fordern, was auf eine Bedingung an die x -Komponente der magnetischen Feldstärke führt:

$$H_{E0x} + H_{T0x} = H_{G0x} \quad (9.66)$$

Mit den Winkeln $\vartheta_i = \vartheta_r$ und ϑ_g erhalten wir zunächst aus (9.66)

$$-H_{i0} \cos \vartheta_i + H_{r0} \cos \vartheta_i = -H_{g0} \cos \vartheta_g \quad (9.67)$$

Einsetzen von (9.63), (9.64) führt dann (9.67) über in

$$n(E_{i0} - E_{r0}) \cos \vartheta_i = n' E_{g0} \cos \vartheta_g \quad (9.68)$$

Bei vorgegebenem E_{i0} stellen (9.60) und (9.68) zwei Bestimmungsgleichungen für E_{r0} und E_{g0} dar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ n \cos \vartheta_g & n \cos \vartheta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{g0} \\ E_{r0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta_i \end{pmatrix} E_{i0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_{g0} \\ E_{r0} \end{pmatrix} = \frac{1}{n \cos \vartheta_i + n' \cos \vartheta_g} \begin{pmatrix} n \cos \vartheta_i & 1 \\ -n' \cos \vartheta_g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta_i \end{pmatrix} E_{i0} \quad (9.69)$$

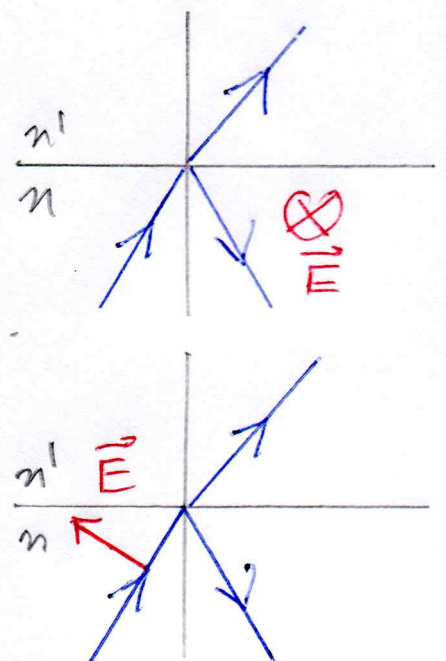
hieraus erhalten wir die Reflexionskoeffizienten

$$r_{\perp} = \frac{E_{r0}^{\perp}}{E_{i0}^{\perp}} = \frac{n \cos \vartheta_i - n' \cos \vartheta_g}{n \cos \vartheta_i + n' \cos \vartheta_g} \quad (9.70)$$

und für den Transmissionskoeffizienten

$$t_{\perp} = \frac{E_{g0}^{\perp}}{E_{i0}^{\perp}} = \frac{2 n \cos \vartheta_i}{n \cos \vartheta_i + n' \cos \vartheta_g} \quad (9.71)$$

Die Ergebnisse (9.70), (9.71) bezeichnet man als Fresnel-Formeln. Sie wurden für die auf Seite 87 gezeigte Situation abgeleitet, dass die elektrische Feldstärke senkrecht zur Zeichenebene polarisiert ist. Entsprechend lassen sich auch die Fresnel-Formeln für die dazu komplementäre Situation ableiten, dass die elektrische Feldstärke parallel zur Zeichenebene polarisiert ist. Wir verrichten hier auf die Herleitung und geben das Ergebnis an:

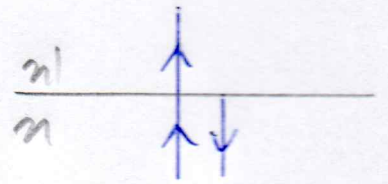


$$r_{||} = \frac{E''_{e0}}{E''_{i0}} = \frac{n' \cos \vartheta_i - n \cos \vartheta_g}{n' \cos \vartheta_i + n \cos \vartheta_g} \quad (9.72)$$

$$t_{||} = \frac{E''_{g0}}{E''_{i0}} = \frac{2n \cos \vartheta_i}{n' \cos \vartheta_i + n \cos \vartheta_g} \quad (9.73)$$

Wir bemerken, dass die Fresnel-Formeln nur für dielektrische mit reellen Brechungsindizes (9.47) abgeleitet wurden. Es zeigt sich aber, dass sie auch so in leitenden Materialien gelten, wo die Brechungsindizes komplex sind. Dabei ist zu beachten, dass dann Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sowohl einen Betrag als auch eine Phase besitzen.

Im Spezialfall eines senkrechten Einfalls mit $\vartheta_i = \vartheta_r = \vartheta_g = 0$ folgt aus (9.70) - (9.73):



$$r = r_{\perp} = -r_{||} = \frac{n - n'}{n + n'} \quad (9.74)$$

$$t = t_{\perp} = t_{||} = \frac{2n}{n + n'} \quad (9.75)$$

9.2.4 Energieströme:

Der Poynting-Vektor (7.44), der den Energiefluß beschreibt, lautet wegen (8.98) und $\mu_r = 1$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (9.76)$$

Aus der These auf Seite 87 folgt dann, dass die jeweiligen Poynting-Vektoren $\vec{S}_i, \vec{S}_r, \vec{S}_g$ in Richtung der entsprechenden Wellenvektoren $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_g$ zeigen.

Der jeweilige Fluß durch die Grenzfläche ist dann durch $|\vec{S}_i| \cos \vartheta_i, |\vec{S}_r| \cos \vartheta_i, |\vec{S}_g| \cos \vartheta_g$ gegeben. Wir betrachten zunächst die einfallende Welle und erhalten durch Realteilbildung von (9.48)

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{E0} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (9.77)$$

und entsprechend

$$\vec{H}_i(\vec{r}, t) = \vec{H}_{E0} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (9.78)$$

so dass der einfallende Poynting-Vektor (9.76) gegeben ist durch

$$\vec{S}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{i0} \times \vec{H}_{i0} \cos^2(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (9.79)$$

Bildet man hiervon das zeitliche Mittel

$$\langle \vec{S}_i(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \vec{S}_i(\vec{r}, t) \quad (9.80)$$

so erhalten wir

$$\langle \vec{S}_i(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_{i0} \times \vec{H}_{i0} \quad (9.81)$$

Für den zeitlich gemittelten Fluß durch die Grenzfläche folgt dann

$$S_i = \langle \vec{S}_i(\vec{r}, t) \rangle \cos \vartheta_i = \frac{1}{2} E_{i0} H_{i0} \cos \vartheta_i \quad (9.82)$$

was sich mit Hilfe von (9.63) reduziert auf

$$S_i = \frac{n}{2c\mu_0} E_{i0}^2 \cos \vartheta_i \quad (9.83)$$

Analog dazu erhalten wir auch für die reflektierte und die gebrochene ebene Welle

$$S_r = \frac{n}{2c\mu_0} E_{r0}^2 \cos \vartheta_r, \quad S_g = \frac{n'}{2c\mu_0} E_{g0}^2 \cos \vartheta_g \quad (9.84)$$

Damit lassen sich die Bruchteile des reflektierten bzw. transmittierten Energieflusses berechnen, nämlich den Reflexionskoeffizienten

$$R_{\perp} = \frac{S_r^{\perp}}{S_i^{\perp}} \stackrel{(9.83), (9.84)}{=} \frac{E_{r0}^2}{E_{i0}^2} \stackrel{(9.70)}{=} r_{\perp}^2 \quad (9.85)$$

und den Transmissionskoeffizienten

$$T_{\perp} = \frac{S_g^{\perp}}{S_i^{\perp}} \stackrel{(9.83), (9.84)}{=} \frac{n'}{n} \frac{E_{g0}^2 \cos \vartheta_g}{E_{i0}^2 \cos \vartheta_i} \stackrel{(9.71)}{=} t_{\perp}^2 \frac{n' \cos \vartheta_g}{n \cos \vartheta_i} \stackrel{(9.86)}{=} \quad (9.86)$$

Dabei gilt unabhängig vom Einfallswinkel ϑ_i und vom Brechungswinkel ϑ_g :

$$R_{\perp} + T_{\perp} \stackrel{(9.85), (9.86)}{=} r_{\perp}^2 + t_{\perp}^2 \frac{n' \cos \vartheta_g}{n \cos \vartheta_i} \stackrel{(9.70), (9.71)}{=} \frac{1}{(n \cos \vartheta_i + n' \cos \vartheta_g)^2} \left\{ (n \cos \vartheta_i - n' \cos \vartheta_g)^2 + 4n^2 \cos^2 \vartheta_i \frac{n' \cos \vartheta_g}{n \cos \vartheta_i} \right\} \Rightarrow R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (9.87)$$

Eine entsprechende Beziehung gilt auch für die parallele Polarisation?

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad (9.88)$$

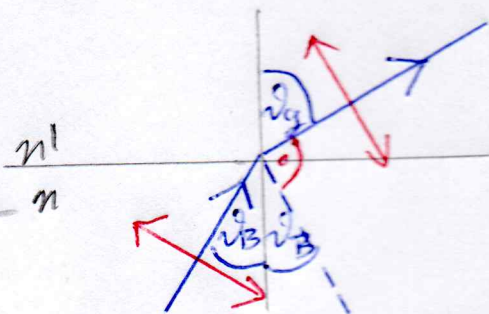
Aus (9.85) - (9.88) folgt, dass unabhängig von der Polarisation die Energieerhaltung gewährleistet ist

$$S_r + S_g = S_i \quad (9.89)$$

9.2.5 Brewster-Winkel:

Die Phänomene Reflexion und Brechung lassen sich auch von einem heuristischen Standpunkt aus verstehen. Die Elektronen im Medium mit dem Brechungsindex n' werden durch die geladene Welle zu Schwingungen angeregt und stellen dann leitfähige Dipole dar. Ein Teil der Schwingungsenergie dieser Dipole erscheint dann als reflektierter Strahl.

Wir wenden nun dieses heuristische Bild für die parallele Polarisation an. Wir fragen uns nun, wann es nach diesem Argument zu keiner reflektierten Welle kommt.



In Abschnitt 7.9 hatten wir gesehen, dass ein Dipol nicht in Richtung der Dipolachse strahlt. Daher erwarten wir keinen reflektierten Strahl beim Brewster Winkel $\theta_i = \theta_B$ mit

$$\theta_B + \theta_g = \frac{\pi}{2} \quad (9.90)$$

Zusammen mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz folgt dann

$$\frac{n'}{n} \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_g} \stackrel{(9.59)}{=} \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_g} \stackrel{(9.90)}{=} \frac{\sin \theta_B}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} = \tan \theta_B \quad (9.91)$$

In der Tat verschwindet beim Brewster-Winkel (9.91) der Reflexionskoeffizient mit paralleler Polarisation:

$$r_{||} \stackrel{(9.72)}{=} \frac{n' \cos \theta_B - n \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_B)}{n' \cos \theta_B + n \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} \stackrel{(9.91)}{=} n \left\{ \frac{\sin \theta_B \cos \theta_B - \sin^2 \theta_B}{\cos \theta_B \cos \theta_B + \sin^2 \theta_B} \right\} \stackrel{(9.90)}{=} 0 \quad (9.92)$$

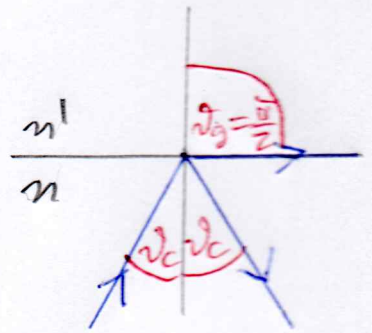
Das bedeutet, dass beim Einstrahlen von unpolarisiertem Licht unter dem Brewster-Winkel das reflektierte Licht eine eindeutig senkrechte Polarisation

aufweist. Damit handelt es sich um ein Versilveren, um polarisiertes Licht zu erzeugen.

Zum Schluß bemerken wir als Beispiel, dass Luft und Glas die Brechungsindizes 1 und 1,5 besitzen. Daher ist der Brewster-Winkel für Glas-Luft durch $\arctan(1/1,5) = 33,7^\circ$ und für Luft-Glas durch $\arctan(1,5) = 56,3^\circ$ gegeben.

9.2.6 Totalreflexion:

Wir betrachten nun für den Fall $n > n'$ die Situation, bei der die gebrochene Welle den Brechungswinkel $\vartheta_g = \pi/2$ aufweist. Dann erhält man für den kritischen Winkel der Totalreflexion $\vartheta_i = \vartheta_c$ nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz (9.59)



$$\sin \vartheta_c = \frac{n'}{n} \quad (9.93)$$

Aus (9.70) und (9.72) folgt dann in der Tat

$$r_{\perp} = r_{\parallel} = 1 \quad (9.94)$$

und die gesamte einfallende Welle wird reflektiert. Als Grenzwinkel für Glas-Luft erhalten wir demnach $\arcsin(1/1,5) = 41,8^\circ$.

Was passiert aber, wenn der Winkel ϑ_i der einlaufenden Welle größer ist als der kritische Winkel der Totalreflexion ϑ_c :

$$\vartheta_i > \vartheta_c \quad (9.95)$$

Dann erhalten wir für die gebrochene Welle

$$\begin{aligned} k_{gz} &= |\vec{k}_g| \cos \vartheta_g = |\vec{k}_g| \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_g} \stackrel{(9.59)}{=} |\vec{k}_g| \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2} \sin^2 \vartheta_i} \\ &= |\vec{k}_g| \frac{n}{n'} \sqrt{\frac{n'^2}{n^2} - \sin^2 \vartheta_i} = |\vec{k}_g| \frac{n}{n'} \sqrt{\sin^2 \vartheta_c - \sin^2 \vartheta_i} \end{aligned} \quad (9.96)$$

Ausgehend von (9.95) müssen wir (9.96) interpretieren als

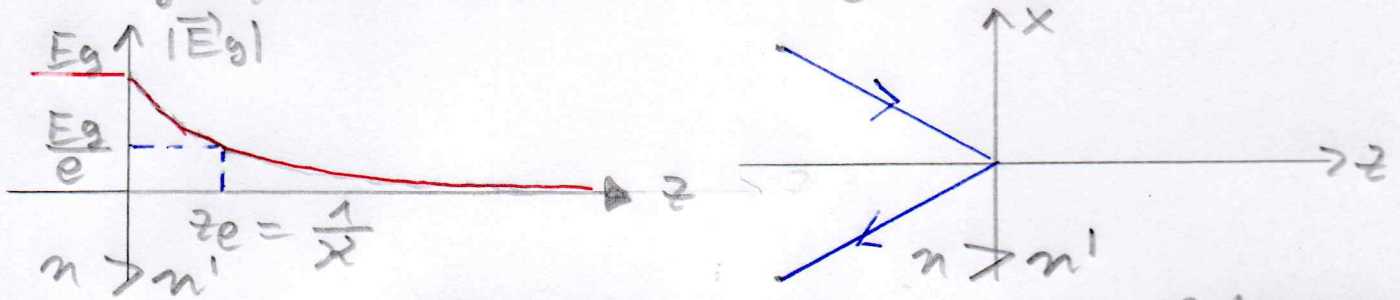
$$k_{gz} = i \alpha, \quad \alpha = |\vec{k}_g| \frac{n}{n'} \sqrt{\sin^2 \vartheta_i - \sin^2 \vartheta_c} \quad (9.97)$$

Das bedeutet, dass die transmittierte Welle exponentiell im optisch dünneren Medium gedämpft wird und daher dort nur wenig eintritt. Da aber

$$k_{gx} = |\vec{k}_g| \sin \vartheta_g \stackrel{(9.59)}{=} |\vec{k}_g| \frac{n}{n'} \sin \vartheta_i \quad (9.98)$$

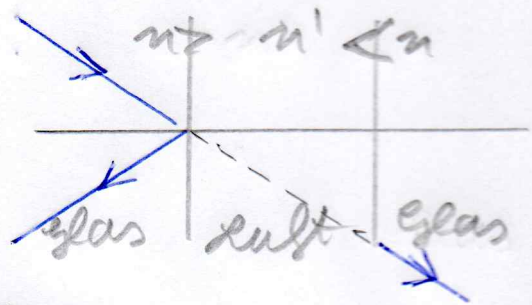
well ist, heißt das, dass die gebrochene Welle parallel zur Grenzfläche propagiert

$$\vec{E}_g(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(k_x x - \omega t)} e^{-\lambda z} \quad (9.99)$$



Um experimentell festzustellen, dass das Licht exponentiell ins optisch dünnere Medium eindringt, kann man so vorgehen, dass man im kleinen Abstand $z < z_0 = 1/\lambda$ wieder ein optisch dichteres Medium platziert:

In einem solchen Fall ist die Totalreflexion nicht total, da die gebrochene Welle hinter der Lücke wieder erscheint.



Wir hatten weiter oben bemerkt, dass die Brechungsindizes von Materialien von der Frequenz der elektromagnetischen Wellen abhängen. Bei Röntgenstrahlen ist nun die Materie typischerweise optisch dünner als Luft bzw. das Vakuum. Daher kommt es bei Röntgenstrahlen zu einer äußeren Totalreflexion. Da die Eindringtiefe der Röntgenstrahlen etwa 50 \AA beträgt, lassen sich damit die Oberflächen untersuchen.

