Kapitel 10

Matrizen

Wir lernen jetzt Matrizen kennen, die sich vielfältig in der Physik anwenden lassen. So lassen sich mir ihrer Hilfe Koordinatentransformationen wie eine Rotation beschreiben. Und es lassen sich lineare Gleichungssysteme mit Matrizen kompakt formulieren und effizient lösen.

10.1 Definitionen

Es seien m, n natürliche Zahlen. Eine $m \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ ist ein rechteckiges Schema $A = (a_{ij})$ mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sowie $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \tag{10.1}$$

Eine $m \times n$-Matrix besitzt also m Zeilen und n Spalten. Ein Beispiel für eine 2×3-Matrix lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} . \tag{10.2}$$

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ wird mit

$$\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R}) \tag{10.3}$$

bezeichnet. Falls $m = n$ vorliegt, wird für die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen die Bezeichnung

$$\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \tag{10.4}$$

verwendet. Ein Beispiel für eine 2×2-Matrix ist:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} . \tag{10.5}$$

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix, dann bezeichnen wir

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \tag{10.6}$$

als i-ten Zeilenvektor von A und entsprechend

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

als j-ten Spaltenvektor von A. Ist ferner $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix, so bezeichnet $A^T = (a_{ij}^T)$ mit den Einträgen $a_{ij}^T = a_{ji}$ eine $n \times m$-Matrix, die man als transponierte Matrix bezeichnet:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{10.8}$$

So gilt für die schon eingeführten beispielhaften Matrizen

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

Durch Transposition wird ein Zeilenvektor zu einem Spaltenvektor und umgekehrt:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}^T = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}). \tag{10.10}$$

10.2 Addition und Subtraktion von Matrizen

Es seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$. Dann werden sie dadurch addiert bzw. subtrahiert, dass ihre entsprechenden Einträge addiert bzw. subtrahiert werden:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{10.11}$$

So erhalten wir für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.12}$$

als Summe und Differenz

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & -3 & 8\end{pmatrix}\,, \qquad A-B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & 11 & 6\end{pmatrix}\,. \tag{10.13}$$

Bei der Addition und damit auch der Subtraktion von Matrizen gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Kommutativität:

$$A \pm B = B \pm A\,. \tag{10.14}$$

b) Assoziativität:

$$A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C\,. \tag{10.15}$$

c) Linearität der Transposition:

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T\,. \tag{10.16}$$

10.3 Multiplikation mit Skalar

Auch die Multiplikation einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$ ist komponentenweise definiert:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}\,. \tag{10.17}$$

So gilt beispielsweise:

$$2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & -7 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 0 & -14 & 2\end{pmatrix}\,. \tag{10.18}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Assoziativität:

$$k(lA) = (kl)A\,. \tag{10.19}$$

b) Distributivität:

$$k(A+B) = kA + kB\,, \qquad (k+l)A = kA + lA\,. \tag{10.20}$$

10.4 Multiplikation zweier Matrizen

Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times p, \mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}(p \times n, \mathbb{R})$ zwei Matrizen. Wichtig ist dabei, dass die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt. Dann ist das Produkt $C = A \cdot B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ der beiden Matrizen A und B definiert durch die Komponenten

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \,. \tag{10.21}$$

Das bedeutet, dass sich das Element c_{ij} als Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A und des j-ten Spaltenvektors von B ergibt. Als Beispiel betrachten wir die Multiplikation einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$ mit einer Matrix $B \in \mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$, was auf die Matrix $A \cdot B = C \in \mathrm{Mat}(4 \times 2, \mathbb{R})$ führt:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 5 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 37 \\ 19 & 10 \\ 21 & 12 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.22}$$

Bei der Multiplikation zweier Matrizen ist das Folgende zu beachten:

a) Das Produkt $B \cdot A$ im obigen Beispiel ist nicht definiert, da die Zahl der Spalten von B, also 2, nicht mit der Zahl der Zeilen von A, also 4, übereinstimmt.

b) Im Allgemeinen gilt für das Produkt von Matrizen, dass es nicht kommutativ ist:

$$A \cdot B \neq B \cdot A \,. \tag{10.23}$$

c) Es ist $A \cdot B = 0$ auch mit $A, B \neq 0$ möglich. Ein Beispiel hierfür ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{10.24}$$

d) Mit der Matrizen-Multiplikation lässt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren definieren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \cdot \vec{b} = (a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \,. \tag{10.25}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Assoziativität:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \,, \qquad (kA) \cdot B = A \cdot (kB) = k(A \cdot B) \,. \tag{10.26}$$

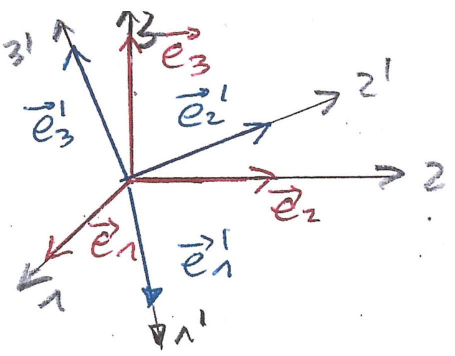

Abbildung 10.1: Einheitsvektoren zweier Koordinatensysteme.

b) Distributivität:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \,, \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \,. \tag{10.27}$$

c) Transposition:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \,. \tag{10.28}$$

Die Gültigkeit dieser Rechenregel beweist man mit Hilfe der Komponentenschreibweise:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)^T = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}^T a_{kj}^T \,. \tag{10.29}$$

10.5 Koordinaten-Transformation

Die Komponenten-Darstellung eines Vektors hat einerseits den Vorteil, dass sie anschaulich ist, andererseits ist sie jedoch von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. Wir behandeln nun eine Transformation der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des ursprünglichen Koordinatensystems in die Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ des transformierten Koordinatensystems, siehe Fig. 10.1. Ein Vektor $\vec{x}$ kann nun sowohl nach den Einheitsvektoren des alten und des neuen Koordinatensystems entwickelt werden:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x_1' \vec{e}_1{}' + x_2' \vec{e}_2{}' + x_3' \vec{e}_3{}' \,. \tag{10.30}$$

Die jeweiligen Entwicklungskoeffizienten x_1, x_2, x_3 bzw. x_1', x_2', x_3' ergeben sich dann nach Abschnitt 9.3 durch Projektion des Vektors $\vec{x}$ auf die jeweiligen Einheitsvektoren:

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}_2, \quad x_3 = \vec{x} \cdot \vec{e}_3 \,, \tag{10.31}$$

$$x_1' = \vec{x} \cdot \vec{e}_1{}', \quad x_2' = \vec{x} \cdot \vec{e}_2{}', \quad x_3' = \vec{x} \cdot \vec{e}_3{}' \,. \tag{10.32}$$

Ganz entsprechend lassen sich auch die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ nach den alten Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ entwickeln:

$$\vec{e}_1{}' = R_{11}\vec{e}_1 + R_{12}\vec{e}_2 + R_{13}\vec{e}_3\,, \tag{10.33}$$

$$\vec{e}_2{}' = R_{21}\vec{e}_1 + R_{22}\vec{e}_2 + R_{23}\vec{e}_3\,, \tag{10.34}$$

$$\vec{e}_3{}' = R_{31}\vec{e}_1 + R_{32}\vec{e}_2 + R_{33}\vec{e}_3\,. \tag{10.35}$$

In kompakter Schreibweise lautet dieser Zusammenhang:

$$\vec{e}_i{}' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\vec{e}_j\,. \tag{10.36}$$

Die dabei auftretenden Matrixelemente R_{ij} sind durch die Skalarprodukte und damit durch die Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}_i{}'$ und $\vec{e}_j$ bestimmt:

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{e}_i{}', \vec{e}_j\right) = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} R_{ik}\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} R_{ik}\delta_{kj} = R_{ij}\,. \tag{10.37}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die alten Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gemäß (9.19) orthonormal zueinander sind. Fordert man nun, dass auch die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ orthonomal zueinander sind, so gilt analog zu (9.19)

$$\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij}\,. \tag{10.38}$$

Aus (9.19) und (10.38) folgt dann eine eine Einschränkung an die Matrix R:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_k{}' \cdot \vec{e}_l{}' &= \sum_{i=1}^{3} R_{ki}\vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} R_{lj}\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} R_{ki}R_{lj}\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} R_{ki}R_{lj}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} R_{ki}R_{li} = \sum_{i=1}^{3} R_{li}R^T_{ik} = \delta_{kl}\,.
\end{aligned} \tag{10.39}$$

Diese Bedingung besagt, dass die Matrix R orthonormal ist, d.h. dass die jeweiligen Zeilen bzw. Spalten orthonormal zueinander sind:

$$RR^T = R^T R = E\,. \tag{10.40}$$

Hier bezeichnet $E = (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix. Aus dem Transformationsgesetz für die Einheitsvektoren folgt nun aber auch ein entsprechendes Transformationsgesetz für die Komponenten eines Vektores $\vec{x}$:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i'\vec{e}_i{}' = \sum_{i=1}^{3} x_i' \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i' R_{ij}\right)\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x_j\vec{e}_j\,. \tag{10.41}$$

Hieraus folgt

$$x_j = \sum_{i=1}^{3} x_i' R_{ij} = \sum_{i=1}^{3} R^T_{ji} x_j'\,, \tag{10.42}$$

was in Vektorschreibweise heißt:

$$\vec{x} = R^T \vec{x}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{x}' = R\vec{x}\,. \tag{10.43}$$

Diese Ergebnis wird zur strengen mathematischen Definition eines Vektors herangezogen. Ein System von drei Elementen x_1, x_2, x_3 ist genau dann ein Vektor, wenn es sich beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem genau so transformiert. Demnach stellen z.B. die Masse, die Zeit und die x-Koordinate nicht die Komponenten eines Vektors dar.

10.6 Inverse Matrizen

Für Matrizen ist eine Division nicht erklärt. Die Gleichung

$$A \cdot X = B \tag{10.44}$$

lässt sich nicht ohne weiteres nach X auflösen. Für die Teilmenge quadratischer Matrizen kann man aber inverse Matrizen bezüglich der Matrizen-Multiplikation finden. Hierzu sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Dann heißt eine ebenfalls quadratische Matrix $A^{-1} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ die zu A inverse Matrix, falls gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E\,. \tag{10.45}$$

Als konkretes Zahlenbeispiel für $A, A^{-1} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ betrachten wir:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E\,. \tag{10.46}$$

Für allgemeine Matrizen $A, A^{-1} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ gilt dann:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E\,. \tag{10.47}$$

Falls A eine Inverse A^{-1} besitzt, so ist diese dann eindeutig. Zum Beweis nehmen wir an: Gäbe es mit A^{-1} und A_{-1} zwei Inverse von A, gälte also

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E\,, \qquad A_{-1}A = AA_{-1} = E\,, \tag{10.48}$$

dann folgt:

$$A_{-1} = A_{-1}E = A_{-1}\left(AA^{-1}\right) = \left(A_{-1}A\right)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}\,. \tag{10.49}$$

Der Vollständigkeit halber listen wir noch die folgenden Rechenregeln für inverse Matrizen auf:

a) Das doppelt Inverse einer Matrix entspricht der Identität:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A\,. \tag{10.50}$$

b) Transposition und Invertierung einer Matrix kommutieren:

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} . \tag{10.51}$$

c) Für die Invertierung einer Matrix A mit einer reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1} . \tag{10.52}$$

d) Das Inverse eines Produktes von Matrizen ist durch das Produkt der inversen Matrizen mit umgekehrter Reihenfolge gegeben:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} . \tag{10.53}$$

Dies lässt sich wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1} &= B^{-1}A^{-1}E = B^{-1}A^{-1}AB \cdot (AB)^{-1} = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B\,(AB)^{-1} \\ &= B^{-1}B \cdot (AB)^{-1} = (AB)^{-1} . \end{aligned} \tag{10.54}$$

e) Das Inverse einer orthonormalen Matriz R ist aufgrund von (10.40) durch die transponierte Matrix gegeben:

$$R^T = R^{-1} . \tag{10.55}$$