Kapitel 11

Determinanten

Jeder quadratischen Matrix kann man eine Zahl zuordnen, die man als Determinante bezeichnet. Mit ihr kann man überprüfen, ob eine quadratische Matrix ein Inverses besitzt. Falls die inverse Matrix existiert, kann man sie mit Hilfe von geeigneten Determinanten berechnen.

11.1 Definitionen

Es sei $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ die Menge aller quadratischen Matrizen auf $\mathbb{R}$. Dann bezeichnet die Determinante die Abbildung

$$\det : \qquad \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,. \tag{11.1}$$

Im Falle $n = 2$ ist die Determinate einer 2×2-Matrix definiert durch

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,. \tag{11.2}$$

Entsprechend gilt im Falle $n = 3$ für die Determinate einer 3×3-Matrix die Regel von Sarrus, die auch als Jägerzaun-Regel bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Die Bezeichnung Jägerzaun-Regel ist auf folgendes Merkschema zur Berechnung der Determinate einer 3×3-Matrix zurückzuführen:

$$
\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

Als Beispiel berechnen wir mit Hilfe von (11.3) die Determinante einer 3×3-Matrix

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0) \\
&= 1 + 6 - 4 = 3 \,. \qquad (11.4)
\end{aligned}
$$

Die Determinante einer 3×3-Matrix (11.3) lässt sich z.B. bei der Berechnung des Vektorprodukts verwenden:

$$
\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_1)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_2)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3 \,, \qquad (11.5)
$$

was gerade der Komponentenschreibweise (9.33) entspricht. Die Regel von Sarrus (11.3) tritt aber auch beim Spatprodukt auf:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) &= (\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - (a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3) \,, \qquad (11.6)
\end{aligned}
$$

was gerade mit (9.39) übereinstimmt.

11.2 Laplacescher Entwicklungssatz

Im allgemeinen Falle einer $n \times n$-Matrix mit $n \geq 3$ wendet man den Laplaceschen Entwicklungssatz an, um eine Determinante zu berechnen. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Dann bezeichnet $A_{ij} \in \mathrm{Mat}(n-1, \mathbb{R})$ diejenige Untermatrix, die man durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A erhält:

$$
A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \qquad (11.7)
$$

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

Abbildung 11.1: Die Vorzeichen beim Laplaceschen Entwicklungssatz (11.8) bzw. (11.9) weisen ein Schachbrettmuster auf.

Dann besagt der Laplacesche Entwicklungssatz, dass man die Determinante einer Matrix A mit Hilfe der Determinanten von Untermatrizen berechnen kann. Hierzu gilt für jede Zeile i mit $1 \leq i \leq n$:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} \,. \tag{11.8}$$

Entsprechendes gilt aber auch für jede Spalte j mit $1 \leq j \leq n$:

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{j+2} a_{2j} \det A_{2j} + \ldots + (-1)^{j+n} a_{nj} \det A_{nj} \,. \tag{11.9}$$

Als Beispiel betrachten wir dieselbe 3×3-Matrix wie im Beispiel (11.4). Aber jetzt berechnen wir deren Determinanten durch Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes auf zweierlei Weisen. Zum einen entwicklen wir nach der ersten Zeile, d.h. wir wenden (11.8) mit $i = 1$ an:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) + 2(3-2) = 1 + 2 = 3 \,. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Zum anderen entwicklen wir nach der zweiten Spalte, d.h. wir wenden (11.9) mit $j = 2$ an, was natürlich auf dasselbe Ergebnis führt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-6) = 1 - 4 + 6 = 3 \,. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Auf der Grundlage dieser Beispiele bemerken wir:

a) Es ist also sinnvoll, nach einer Zeile bzw. Spalte zu entwickeln, die möglichst viele Nullen enthält.

b) Die Vorzeichenverteilung im Laplaceschen Entwicklungssatz (11.8) bzw. (11.9) kann man sich dabei als „Schachbrettmuster“ vorstellen, wobei die Hauptdiagonale nur aus Pluszeichen besteht, siehe Fig. 11.1.

11.3 Eigenschaften

Wir stellen nun einige nützliche Eigenschaften zusammen, die beim Berechnen von Determinanten zu beachten sind.

a) Bei einer Diagonalmatrix ist die Determinante durch das Produkt der Diagonalelemente gegeben:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \\ \mathcal{O} & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \,. \tag{11.12}$$

b) Hat die Zeile einer Matrix einen gemeinsamen Faktor λ, so gilt für deren Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \,. \tag{11.13}$$

c) Hat die Spalte einer Matrix einen gemeinsamen Faktor λ, so gilt für deren Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \ldots & \lambda a_{1j} & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & \lambda a_{nj} & \ldots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \ldots & a_{1j} & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & a_{nj} & \ldots \end{pmatrix} \,. \tag{11.14}$$

d) Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

e) Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zur i-ten Zeile das λ-Fache der k-ten Zeile hinzuaddiert:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & \ldots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \,. \tag{11.15}$$

f) Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zur j-ten Spalte das λ-Fache der l-ten Spalte hinzuaddiert:

$$\det \begin{pmatrix} \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1l} & \ldots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nl} & \ldots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \ldots & a_{1j} + \lambda a_{1l} & \ldots & a_{1l} & \ldots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & a_{nj} + \lambda a_{nl} & \ldots & a_{nl} & \ldots \end{pmatrix} \,. \tag{11.16}$$

g) Matrix A und transponierte Matrix A^T haben dieselbe Determinante:

$$\det A = \det A^T\,. \tag{11.17}$$

h) Aus $\det A = 0$ folgt, dass A nicht invertierbar ist, da die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear abhängig sind.

Eine Veranschaulichung hiervon ist z.B durch das Spatprodukt (11.6) der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren gegeben. Sobald die drei Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear abhängig sind, verschwindet mit dem Spatprodukt das von ihnen aufgespannte Volumen und damit die Determinante der von ihnen gebildeten Matrix.

i) Der Produktsatz besagt, dass die Determinante des Produktes zweier Matrizen durch das Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen gegeben ist:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)\,. \tag{11.18}$$

Als Spezialfall wenden wir den Produktsatz auf Matrix A und inverse Matrix A^{-1} an, für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = E\,. \tag{11.19}$$

Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so kann man auf der linken Seite den Produktsatz (11.19) und auf der rechten Seite a) verwenden:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = (\det A) \cdot (\det A^{-1}) = \det E = 1\,. \tag{11.20}$$

Damit erhalten wir das Ergebnis, dass die Determinante der inversen Matrix A^{-1} durch das Inverse der Determinante der Matrix A gegeben ist:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,. \tag{11.21}$$

Ist also $\det A = 0$, dann existiert A^{-1} nicht, siehe h).

j) Für eine orthonormale Matrix R, die die Eigenschaft (10.40) erfüllt, gilt:

$$\frac{1}{\det R} = \det R^{-1} = \det R^T = \det R\,. \tag{11.22}$$

Im ersten Schritt wurde (11.21) verwendet, im zweiten Schritt wurde (10.55) beachtet und schließlich konnte (11.17) angewandt werden. Aus (11.22) ergibt sich dann:

$$\det R = \pm 1\,. \tag{11.23}$$

Man wählt üblicherweise eine orthonormale Matrix mit der Eigenschaft $\det R = 1$, da dann ein Rechtssystem wieder in ein Rechtssystem abgebildet wird.

Wir wenden nun diese Determinanten-Eigenschaften an, um die Determinante der obigen 3×3-Matrix (11.4) erneut zu berechnen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (-1) = 3\,. \tag{11.24}$$

Im ersten Schritt wurde mit Hilfe von d) die erste und zweite Spalte vertauscht. Anschließend wurde im zweiten Schritt e) dadurch angewandt, dass von der dritten Spalte das 1/3-Fache der ersten Spalte subtrahiert wurde. Im dritten Schritt wurde nochmals e) verwendet, nun wurde aber von der dritten Spalte das 1/3-Fache der zweiten Spalte subtrahiert. Und schließlich führte der Laplacesche Entwicklungssatz (11.8) bzw. (11.9) dazu, dass sich die Determinante aus dem Produkt der Diagonalelemente unmittelbar berechnen lässt.

11.4 Inverse Matrix

Mit Hilfe der Cramerschen Regel lässt sich das Inverse einer Matrix A, sofern dieses existiert, mit Hilfe von Determinanten wie folgt berechnen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\,. \tag{11.25}$$

Hierbei bezeichnet

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji} \tag{11.26}$$

die Adjunkte der Matrix A. Sie wird aus den Determinanten aller Untermatrizen A_{ji} gebildet.

Als erstes Beispiel betrachten wir eine allgemeine $2{\times}2$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{11.27}$$

deren Determinante schon in (11.2) berechnet wurde. Gemäß (11.26) lautet deren Adjunkte

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\, a_{22} & (-1)^{1+2}\, a_{21} \\ (-1)^{2+1}\, a_{12} & (-1)^{2+2}\, a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{11.28}$$

Damit ergibt sich die zu A inverse Matrix mit Hilfe von (11.25) zu

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{11.29}$$

Dieses Ergebnis hatten wir schon in (10.47) erwähnt.

Nun betrachten wir noch als zweites Beispiel die $3{\times}3$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{11.30}$$

mit der Determinante

$$\det A = 8 + 0 + 0 - (2 + 2 + 0) = 4\,. \tag{11.31}$$

Da $\det A \neq 0$ ist, existiert die zu A inverse Matrix A^{-1}, die nun mit der Cramerschen Regel berechnet wird. Die Adjunkte von A ist nun aufgrund von (11.26) eine 3×3-Matrix mit Determinanten von 2×2-Matrizen als Einträgen:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T\,. \tag{11.32}$$

Hieraus folgt dann mit (11.25) die zu A inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj } A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\,. \tag{11.33}$$

Zur Probe berechnen wir noch:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E\,. \tag{11.34}$$