Kapitel 12

Lineare Gleichungssysteme

Bei vielen praktischen Fragestellungen treten lineare Gleichungssysteme auf. Es handelt sich hierbei um lineare Gleichungssysteme mit einer oder mehreren Unbekannten, die alle gleichzeitig erfüllt sein sollen.

12.1 Definition

Allgemein lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten immer auf die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\,, \\ &\vdots \qquad (12.1) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n\,. \qquad (12.2) \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme, bei denen alle b_i mit $i = 1, \ldots, n$ gleich Null sind, werden homogen genannt, andernfalls nennt man sie inhomogen. Homogene Gleichungssysteme besitzen stets mindestens die sogenannte triviale Lösung, bei der alle Unbekannten gleich Null sind. Bei inhomogenen Gleichungssystemen kann dagegen der Fall eintreten, dass überhaupt keine Lösung existiert.

12.2 Matrixform

Für die Behandlung linearer Gleichungssysteme ist es nützlich, alle Koeffizienten a_{ij} zu einer Matrix A, der sogenannten Koeffizientenmatrix, zusammenzufassen. Entsprechend lassen sich auch alle Unbekannten und die rechte Seite des Gleichungssystems zu Vektoren, also einspaltigen

Matrizen, zusammenfassen:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{12.3}$$

Damit schreibt sich ein lineares Gleichungssystem unter Benutzung der Matrix-Multiplikation kurz

$$A\vec{x} = \vec{b}\,. \tag{12.4}$$

12.3 Lösbarkeit

Ein Vektor $\vec{x}$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems, wenn $A\vec{x} = \vec{b}$ gilt. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems bezeichnet man als:

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} \,|\, A\vec{x} = \vec{b} \right\}. \tag{12.5}$$

Ob und wie viele Lösungen ein lineares Gleichungssystem besitzt, ist unterschiedlich. Es können die folgenden Fälle auftreten:

a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, d.h. die Lösungsmenge ist die leere Menge $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$.

b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung, d.h. die Lösungsmenge enthält genau ein Element.

c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge enthält also dann unendlich viele n-Tupel, die alle Gleichungen des Systems lösen.

12.4 Gauß-Verfahren

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems lässt sich grundsätzlich mit Hilfe der erweiterten Koeffizientenmatrix bestimmen. Hierzu fügt man an die Koeffizientenmatrix A eine Spalte mit dem Inhomogenitätenvektor $\vec{b}$ hinzu:

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right). \tag{12.6}$$

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems verändert sich nicht, wenn eine der drei elementaren Zeilenumformungen vorgenommen wird:

a) Vertauschung zweier Zeilen.

b) Multplizieren einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl.

c) Addieren einer Zeile oder des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Im Rahmen des Gauß-Verfahrens wendet man diese drei elementaren Zeilenumformungen iterativ an, um die erweiterte Koeffizientenmatrix in die sogenannte Stufenform zu überführen:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1k} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{kk} & \dots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right) . \tag{12.7}$$

Um immer genau diese Form zu erhalten, muss man manchmal auch Spaltenvertauschungen vornehmen. Die ändern dann die Reihenfolge der Variablen, was man am Ende berücksichtigen muss. Außerdem nehmen wir bei der obigen Stufenform an, dass $a'_{jj} \neq 0$ für $j = 1, \dots, k$. Die Anzahl der Lösungen lässt sich dann an den Koeffizienten b'_i mit $i = 1, \dots, m$ ablesen:

a) Ist mindestens ein b'_i mit $i = k+1, \dots, m$ von Null verschieden, so gibt es keine Lösung.

b) Sind alle $b'_{k+1}, \dots, b'_m$ gleich Null oder gilt $k = m$, so gilt

   i) ist $k = n$, so ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar.

   ii) ist $k < n$, so gibt es unendlich viele Lösungen. Der Lösungsraum hat dann die Dimension $n - k$.

12.5 Gauß-Jordan-Verfahren

Durch weitere elementare Zeilenumformungen lässt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix von der Stufenform auf die reduzierte Stufenform bringen:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a''_{1k+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a''_{2k+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a''_{kk+1} & \dots & a''_{kn} & b''_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b''_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b''_m \end{array}\right) . \tag{12.8}$$

Sofern es eine Lösung gibt, falls also $b''_{k+1} = \ldots = b''_m = 0$ gilt oder $k = m$, dann lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \vdots \\ b''_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a''_{1k+1} & -a''_{1k+2} & \ldots & -a''_{1n} \\ -a''_{2k+1} & -a''_{2k+2} & \ldots & -a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a''_{kk+1} & -a''_{kk+2} & \ldots & -a''_{kn} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-k} \right\} . \tag{12.9}$$

12.6 Beispiel für eindeutige Lösung

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad &= 1 \; . \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{12.10}$$

Es besitzt die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) . \tag{12.11}$$

Wir wenden nun elementare Zeilenumformungen an:

$$\begin{aligned} &\overset{①}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \overset{②}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \\ &\overset{③}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \qquad \overset{④}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) . \end{aligned} \tag{12.12}$$

Hierbei wurde im Schritt ① das Zweifache der ersten Zeile von der zweiten Zeile abgezogen. Beim Schritt ② wird zum einen die zweite Zeile in ihr Negatives überführt, zum anderen wird zur dritten Zeile die zweite Zeile hinzuaddiert. Schließlich wird im Schritt ③ die dritte Zeile mit (-1/3) multipliziert, während von der ersten Zeile das Zweifache der zweiten Zeile subtrahiert wird. Im letzten Schritt ④ wird dann zur ersten Zeile das Dreifache der dritten Zeile addiert und von der zweiten Zeile das Zweifache der dritten Zeile abgezogen. Am Ende lesen wir aus (12.12) ab, dass es eine eindeutige Lösung gibt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\} . \tag{12.13}$$

Zur Probe berechnen wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{12.14}$$

Diese eindeutige Lösung folgt auch durch Invertierung der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} , \tag{12.15}$$

die die Determinante

$$\det A = -3 + 2 - (-4) = 3 \tag{12.16}$$

besitzt. Da $\det A = 3 \neq 0$ ist, existiert die Inverse zu A. Bilder wir die Adjunkte zu A gemäß (11.26)

$$\mathrm{adj} A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T , \tag{12.17}$$

so folgt die Inverse A^{-1} aus (11.25):

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj} A}{\det A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \tag{12.18}$$

Der eindeutige Lösungsvektor ergibt sich damit zu

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{12.19}$$

12.7 Weiteres Beispiel

Als letztes Beispiel sei das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}- 2x_4} &= -1 \; . \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned} \tag{12.20}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet hier

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) . \tag{12.21}$$

Elementare Zeilenumformungen ergeben zunächst

$$\overset{①}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) , \tag{12.22}$$

$$\overset{②}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) , \tag{12.23}$$

$$\overset{③}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) . \tag{12.24}$$

Im Schritt ① wird die zweite von der ersten Zeile abgezogen. Auerdem wird von der dritten Zeile das Dreifache der ersten Zeile abgezogen. Ferner wird im Schritt ② von der ersten Zeile die Hälfte der zweiten Zeile abgezogen, die Einträge der zweiten Zeile werden halbiert und zur dritten Zeile wird die zweite Zeile hinzuaddiert. Um die reduzierte Stufenform zu erhalten, müssen im Schritt ③ schließlich noch zweite und dritte Spalte vertauscht werden. Der zu (12.24) gehörende Lösungsvektor lautet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} . \tag{12.25}$$

Wegen der Vertauschung der zweiten und der dritten Spalte müssen aber noch die zweite und die dritte Komponente des Lösungsvektors vertauscht werden, so dass wir erhalten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t \\ s \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} . \tag{12.26}$$

Und schließlich machen wir noch die Probe:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -s + t + s + 1 + t - 2t = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -s + t + s - 1 - t = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -3s + 3t + 3s + 1 + t - 4t = 1 \,. \end{aligned} \tag{12.27}$$