Kompaktkurs in Mathematik

Organisatorisches:

- Täglich: 6. – 16. April
- Vorlesung: 9.00 – 11.00
  - Pausen: 9.55 – 10.05
  - via zoom
  - Aufnahmen: via Panopto
- Übungen: 13.00 – 16.00, via zoom
- Homepage:
  - Vorlesungsmanuskript
  - Übungsaufgaben
  - Heute: Eingangstest

Grundidee:

- freiwillig, keine Noten
- Brückenkurs zwischen der Mathematik an der Schule und an der Universität
- Mathematik ist „Sprache" der Physik:
  - Formalisierung physikalischer Gesetze
  - Herleitung neuer Gesetze

Themen:

1. Zahlbereiche
2. Folgen
3. Reihen
4. Funktionen
5. Ableitung
6. Taylor-Reihen
7. Integration
8. Komplexe Zahlen
9. Vektoren
10. Matrizen
11. Determinante
12. Lineare Gleichungssysteme

1. Zahlbereiche:

1.1 Übersicht:

- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0\}$
- Reelle Zahlen: Menge aller Dezimalzahlen

$$\mathbb{R} = \{a_{-n}a_{-n+1}\cdots a_0, a_1a_2a_3\cdots \mid a_i \in \{0,1,2,\dots,9\};\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

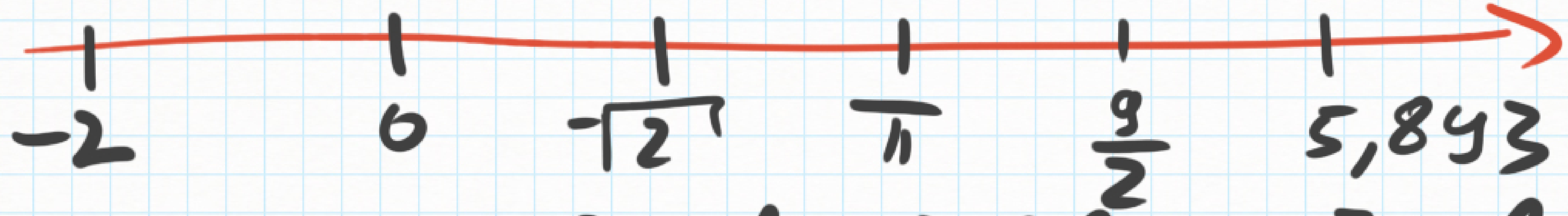
$$= \{\sum_{i=-n}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i} \mid a_i \in \{0,1,2,\dots,9\};\ i, n \in \mathbb{N}_0\}$$

Beispiel: $178{,}576 = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$

$a_2 = 1,\ a_1 = 7,\ a_0 = 8,\ a_{-1} = 5,\ a_{-2} = 7,\ a_{-3} = 6$

Bemerkungen zu reellen Zahlen:

- Darstellung auf Zahlengeraden:



- Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch nicht eindeutig:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-4}{-8}$$

$\frac{a}{b}$ ist eindeutig, falls a und b teilerfremd und b positiv

- Jede rationale Zahl kann als Bruch oder als Dezimalzahl geschrieben werden

(a) mit endlich vielen Nachkommastellen:

z.B. $\frac{1}{4} = 0{,}25$

(b) oder als periodische Dezimalzahl

z. B. $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$

Umkehrung:

(c) Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen kann als Bruch dargestellt werden

$0{,}xyz = \frac{xyz}{1000}$, z. B. $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

(d) Jede periodische Dezimalzahl kann als Bruch geschrieben werden

$0{,}\overline{xyz} = \frac{xyz}{999}$, z. B. $0{,}\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

1.2 Körperaxiome der reellen Zahlen:

von der Schule bekannt: 4 Grundrechenarten

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

$\underbrace{\text{Addition, Multiplikation}}_{\text{eigenständige Operationen}}$ $\underbrace{\text{Subtraktion, Division}}_{\text{Auffassung als Addition, Multiplikation mit geeigneten Zahlen}}$

Addition: „+" Multiplikation „·"

Axiome der Addition:

(A1) Assoziativgesetz: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

(A2) Kommutativgesetz: für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x$$

(A3) Neutrales Element 0: für alle $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

(A4) Inverses Element: für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Negatives $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = (-x) + x = 0$

Axiome der Multiplikation:

(M1) Assoziativgesetz: für jedes $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(M2) Kommutativgesetz: für jedes $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

(M3) Neutrales Element 1: für jedes x

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

(M4) Inverses Element: zu jeder Zahl $0 \neq x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Inverses $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ mit

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

Distributivgesetze:

Verbindung zwischen Addition und Multiplikation: $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

Menge mit zwei Operationen, für die die obigen Gesetze gelten, nennt man einen Körper

Beispiele für Körper: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Ausblick: Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

1.3 Bemerkungen:

- Assoziativgesetze: Klammern können auch weggelassen werden
- Kommutativgesetze: Reihenfolge bei Addition und Multiplikation kann vertauscht werden
- Distributivgesetze: Regeln, was beim Auflösen von Klammern passiert
- Axiom (A4): Subtraktion von y wird als Addition mit $(-y)$ eingeführt $\quad x+(-y) = x-y = (-y)+x = -y+x$

- Axiom (M4): Division mit y wird als Multiplikation mit y^{-1} eingeführt

$$x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}$$

- Axiom (M2): abkürzende Schreibweise

$$x \cdot y = xy$$

- Potenzschreibweise: $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}}$$

Ergänzung: folgende Festlegungen

$$x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{n\text{-mal}} \quad , n \in \mathbb{N}$$

1.5 Ausgewählte Rechenregeln:

Rechenregeln in Körpern, wie z. B. reellen Zahlen
$x, y, z \in \mathbb{R}$; $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $n, m \in \mathbb{Z}$

- Kürzungsregel der Addition:

$$x + y = x + z \quad \Rightarrow \quad y = z$$

- Kürzungsregel der Multiplikation:

$$x \cdot y = x \cdot z \;, x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y = z$$

- Minus · Minus = Plus

$$-(-x) = x \;, \quad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

- Null bei Multiplikation:

$$x \cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } y = 0$$

- Multiplikation mit 0:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

- Doppeltes Invertieren verändert nichts: $(x^{-1})^{-1} = x, \; x \neq 0$
- Addition von Brüchen:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + uy}{u \cdot v}$$

- Multiplikation von Brüchen:

$$\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{x \cdot y}{u \cdot v}$$

- Potenzgesetze:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

$$x^n \cdot y^n = (xy)^n$$

1.5 Definition einer Wurzel:

Zu jeder $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gibt es eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und $a^n = x$

Wir nennen dann a die n-te Wurzel von x:

$$a = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Obige Potenzgesetze gelten auch für rationale Exponenten, sofern die Basis nicht negativ ist.

Beispiel: $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}}$

2. Folgen:

- auf den ersten Blick: einfache Objekte
- nützlich für Naturwissenschaftler oder für Bankangestellten
- Menge aufeinander folgender Zahlen
- nummerierbar: Kennzeichnung durch Index $n \in \mathbb{N}$

2.1 Definition:

Folge in $\mathbb{R}$: jeder natürlichen Zahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

2.2 Beispiel:

- Konstante Folge: $c \in \mathbb{R}$

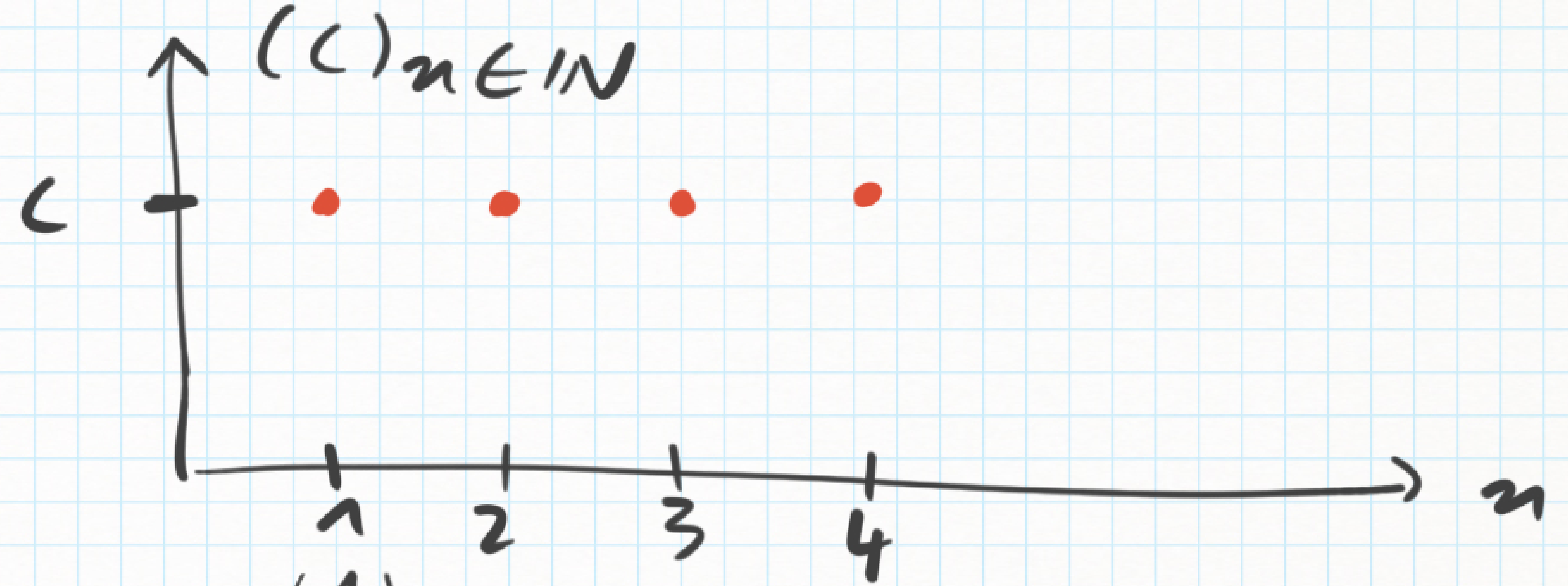
  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_{n\in\mathbb{N}}$

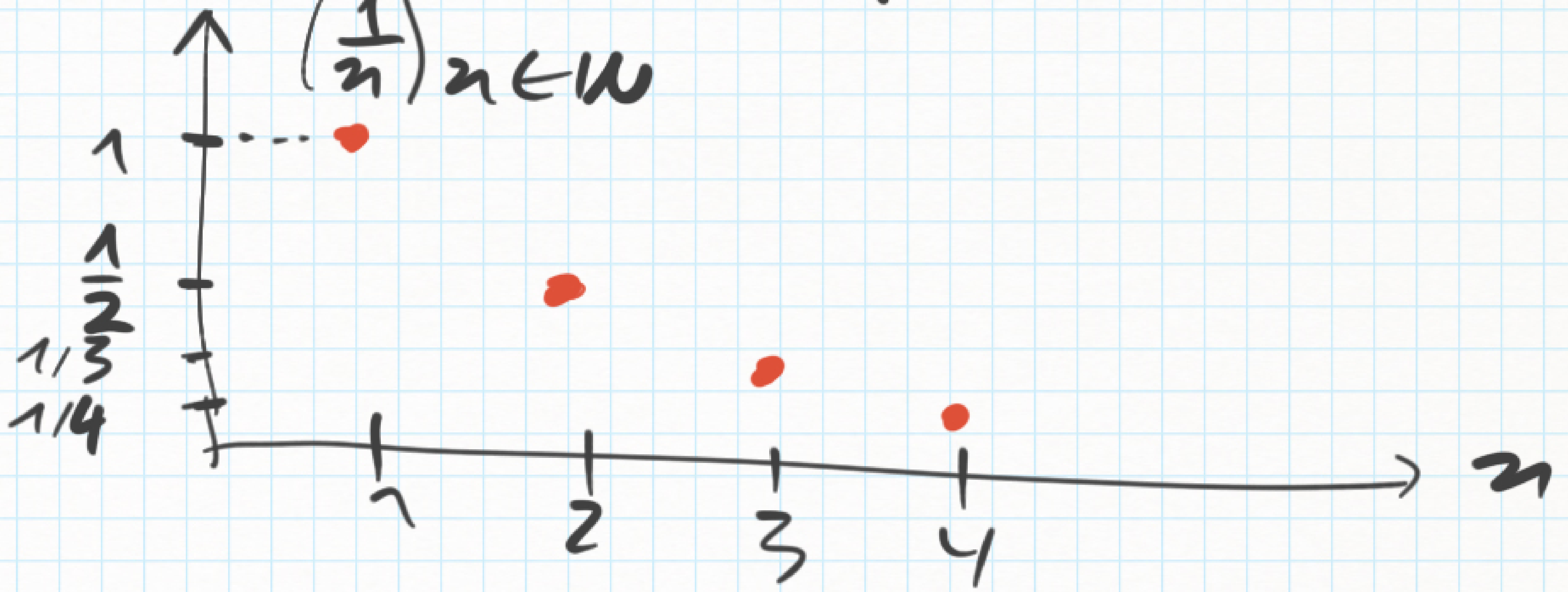
  $= (c, c, c, \ldots)$

- harmonische Folge:

  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

  $= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$

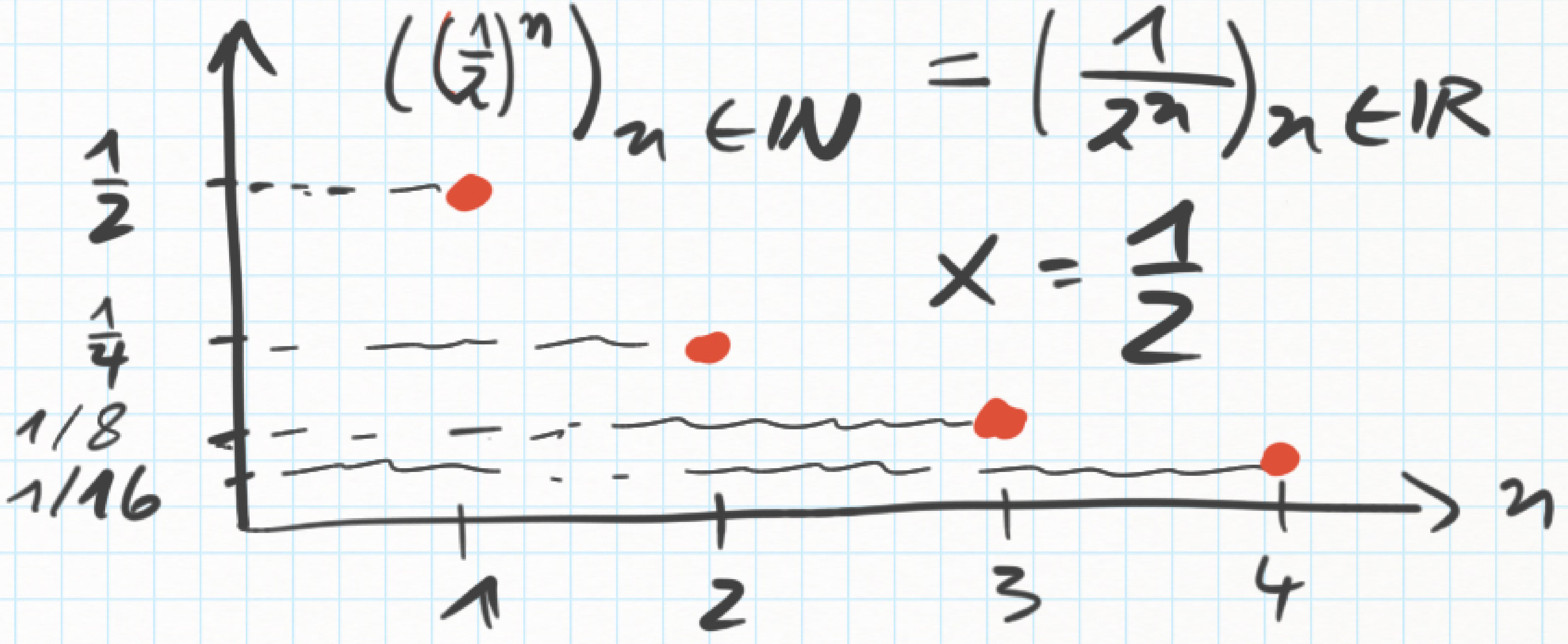




• geometrische Folge: $x \in \mathbb{R}$, $|x|<1$

$(a_n)_{n\in\mathbb{R}} = (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$= (x, x^2, x^3, x^4, \ldots)$



2.3 Konvergenz und Grenzwert:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a\in\mathbb{R}$. Wir nennen a einen Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$, wenn für jedes $\varepsilon>0$ ein $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ gibt mit

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon}$$

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein $a\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Andernfalls: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge, falls $a_n \longrightarrow 0$

Ohne Beweis: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig.

2.4 Beispiele:

- Konstante Folge: konvergent
  Wähle für jedes $\varepsilon > 0$: $N_\varepsilon = 1$
  Dann gilt für alle $n \geq N_\varepsilon = 1$: $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$
- Harmonische Folge: Nullfolge
  Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle N_ε so, dass $0 < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$
  Dann gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$:
  $$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

• Geometrische Folge: $|x| < 1 \rightarrow \frac{1}{|x|} > 1$

Es sei $x \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt: $\frac{1}{|x|} > 1$

Dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ und $y = \frac{1}{|x|} - 1 > 0$

Wähle N_ε so, dass gilt $\frac{1}{N_\varepsilon} < y \cdot \varepsilon$. Dann gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$

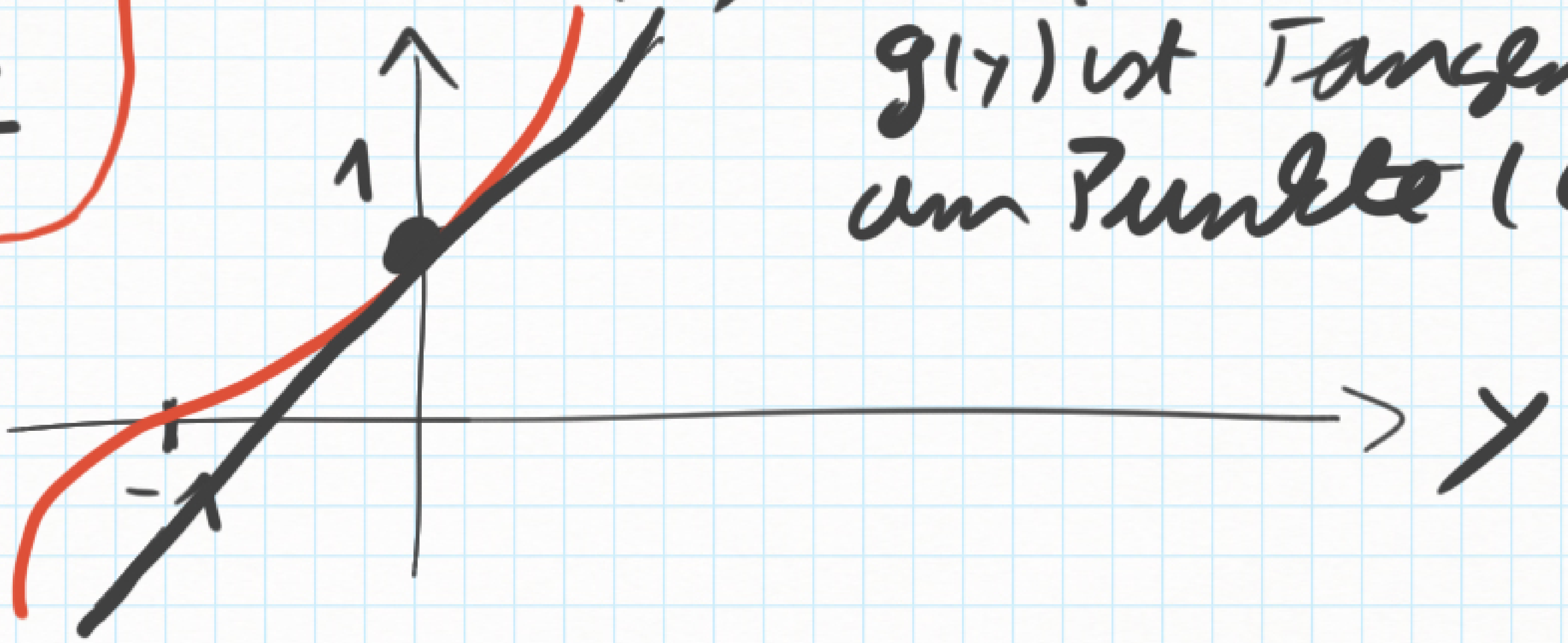
$$|a_n - 0| = |x^n| = |x|^n = \frac{1}{(1+y)^n} \leq \frac{1}{1+ny} < \frac{1}{ny} < \frac{1}{n} \varepsilon \cdot N_\varepsilon \leq \varepsilon$$

$$y = \frac{1}{|x|} - 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} = y + 1 \Rightarrow |x| = \frac{1}{1+y}$$

Bernoulli Ungleichung:

$$\underbrace{(1+y)^n}_{= f(y)} \geq \underbrace{1 + ny}_{= g(y)}$$

Funktion Tangente



g(y) ist Tangente von f(y) am Punkte (0/1)