2.5 Grenzwertsätze: Ohne Beweis

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt:

$$a_n + b_n \longrightarrow a + b$$
$$a_n - b_n \longrightarrow a - b$$
$$a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$$
$$|a_n| \longrightarrow |a|$$

Ist zudem $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ ist konvergent mit

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$$

2.6 Einschachtelungssatz: Ohne Beweis

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ferner sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{für } n \geq n_0$$

Dann gilt: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = a$

$\Rightarrow$ äußerst nützlich für Konvergenzbeweise

2.7 Beispiele: aufeinander aufbauende Beispiele

- Verallgemeinerte harmonische Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\underbrace{a_n = 0}_{\text{konstante Folge}} \leq c_n = \frac{1}{n^2} \leq \underbrace{\frac{1}{n} = b_n}_{\substack{\text{harmonische Folge} \\ \rightarrow \text{Nullfolge}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

- Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{4n^2+3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\underbrace{a_n = 0}_{\text{konstante Folge}} \leq c_n = \frac{1}{4n^2+3n+1} \leq \underbrace{\frac{1}{4n^2} = b_n}_{\substack{\text{verallgemeinerte} \\ \text{harmonische Folge}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2+3n+1} = 0$$

- $$\frac{3n^2+1}{4n^2+3n+1} = \frac{3n^2}{4n^2+3n+1} + \underbrace{\frac{1}{4n^2+3n+1}}_{\to 0}$$

$$\longrightarrow \frac{3}{4+3\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}} + 0 \longrightarrow \frac{3}{4}$$

harmonische Folge — verallgemeinerte harmonische Folge

3. Reihen:

- Summation der Glieder einer Folge: unendliche Summe = Reihe
- Existenz einer Reihe ist problematisch
  z. B. konstante Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a \neq 0$ führt durch Aufsummation aller Folgenglieder zu einer divergenten Reihe

3.1 Definition:

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

eine Partialsumme.

Summationssymbol
→ hilfreiche Abkürzung

Sie existiert immer. Konvergiert die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist der Grenzwert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

der Wert der Reihe. Notation: $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

3.2 Geometrische Reihe:

geometrische Folge: $(a_k)_{k\in\mathbb{R}} = (x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|x|<1$

geometrische Partialsumme: $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ ist berechenbar

$$+ \quad s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$- \quad x\cdot s_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n$$

$$(1-x)\cdot s_n = 1 - x^n \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|x|<1$ ist eine Nullfolge, siehe Kapitel 2

$\Rightarrow$ Folge der geometrischen Partialsummen ist konvergent

$$\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Beispiel:

geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1\cdot\frac{2}{1} = 2$$

3.3 Harmonische Reihe:

harmonische Folge $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch Nullfolge harmonische Partialsumme: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Wir zeigen nun, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Spezialisierung: $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$

$$s_{2^m} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1 + \left(\frac{1}{2}\right)}_{m=1} + \left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq 1/4} + \frac{1}{4}\right)}_{m=2} + \left(\underbrace{\frac{1}{5}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}} + \frac{1}{8}\right)}_{m=3} \qquad = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2\cdot 2^{m-1}}$$

$$+ \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{\underbrace{2^{m-1}+1}_{\geq 2^{m-1}}} + \frac{1}{\underbrace{2^{m-1}+2}_{\geq 2^{m-1}}} + \ldots + \frac{1}{\overbrace{2^{m-1}+2^{m-1}}}\right)}_{2^{m-1}\text{ Summanden}}$$

$\geq 1 + \frac{1}{2} m \Rightarrow s_{2^m}$ wächst unbegrenzt mit m: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergent

3.4 Beispiele konvergente Reihe:

Den Grenzwert von konvergenten Reihen kann man zur Definition von Funktionen verwenden. Hierzu ohne Beweis drei Beispiele. Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ die Fakultät:

- Exponentialfunktion:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

- Kosinusfunktion:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

- Sinusfunktion:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

4. Grenzwert und Stetigkeit von Funktion:

- Funktionen sind von grundlegender Bedeutung für Naturwissenschaften
- Hier: Beschränkung auf stetige Funktionen. Sie machen keine Sprünge, der Graph lässt sich zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.

4.1 Definition:

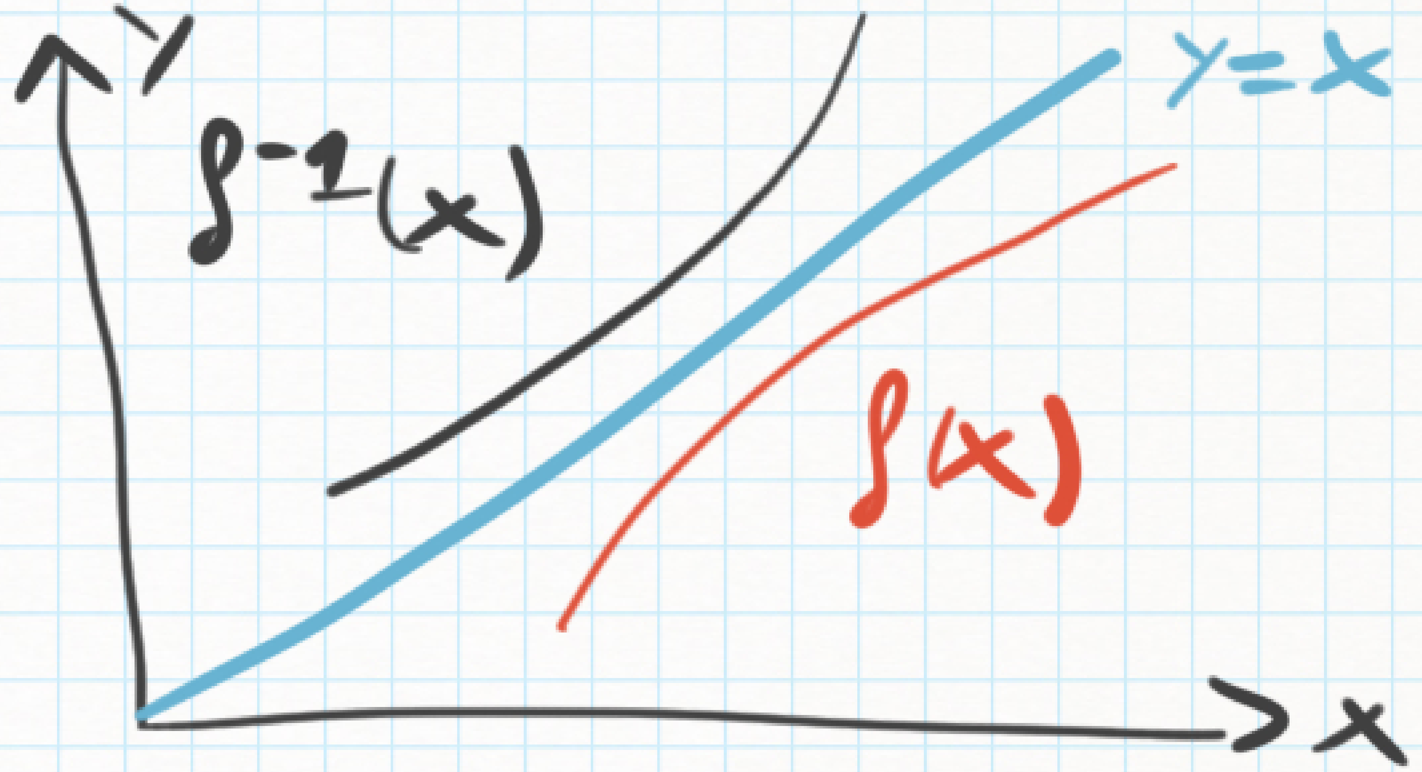
Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem x aus dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Element $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

Eine Funktion $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Umkehrfunktion der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn: $g(f(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$ für alle $x \in D$ und $y \in S$.

Schreibweise: $f^{-1} = g$

Anschaulich erhält man $f^{-1}(x)$, indem man $f(x)$ an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt



4.2 Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

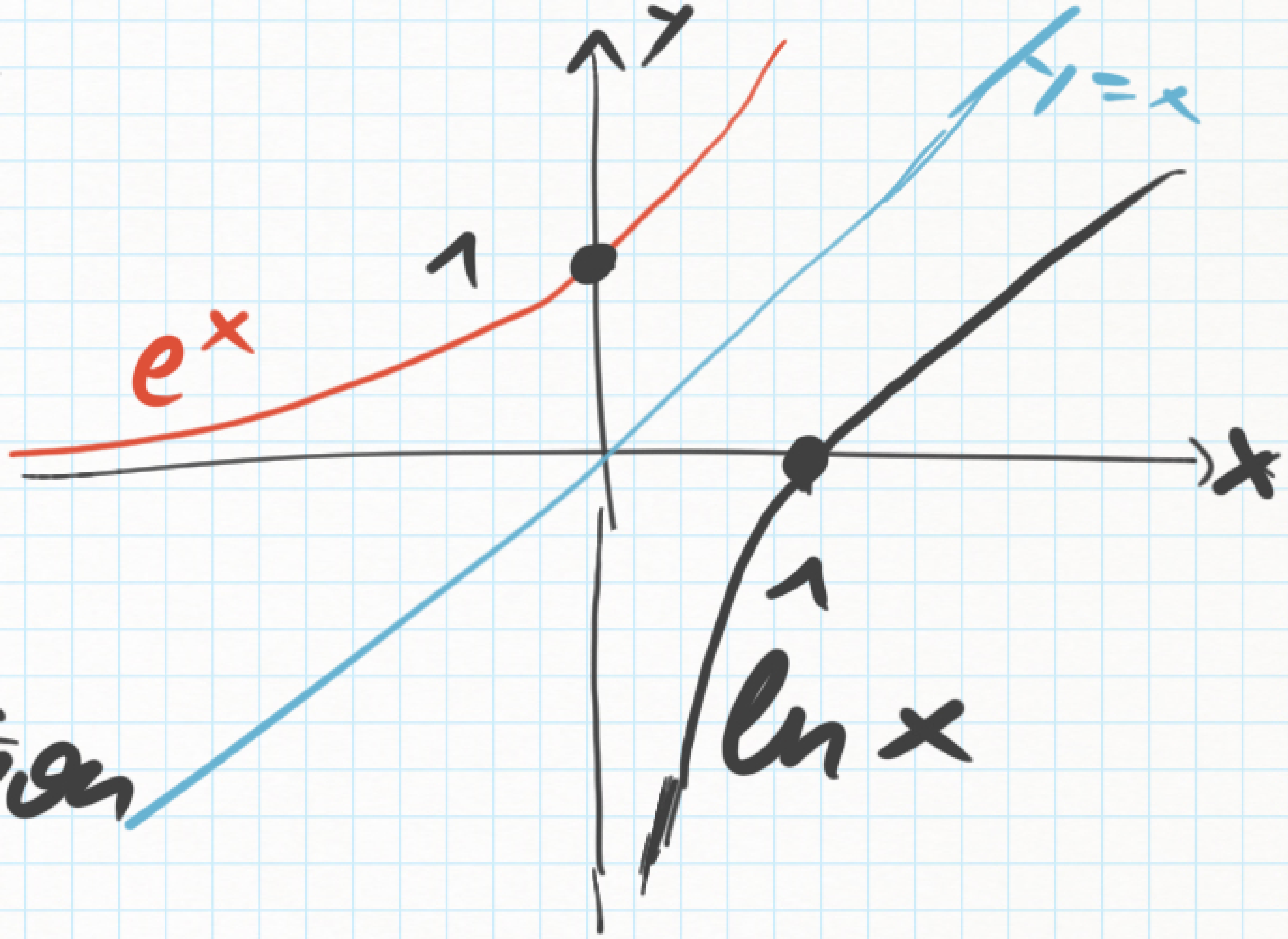
Rechenregel für Exponentialfunktion:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $\ln x$ nur für $x > 0$ definiert:

$$\ln e^x = x, \quad e^{\ln x} = x$$

Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

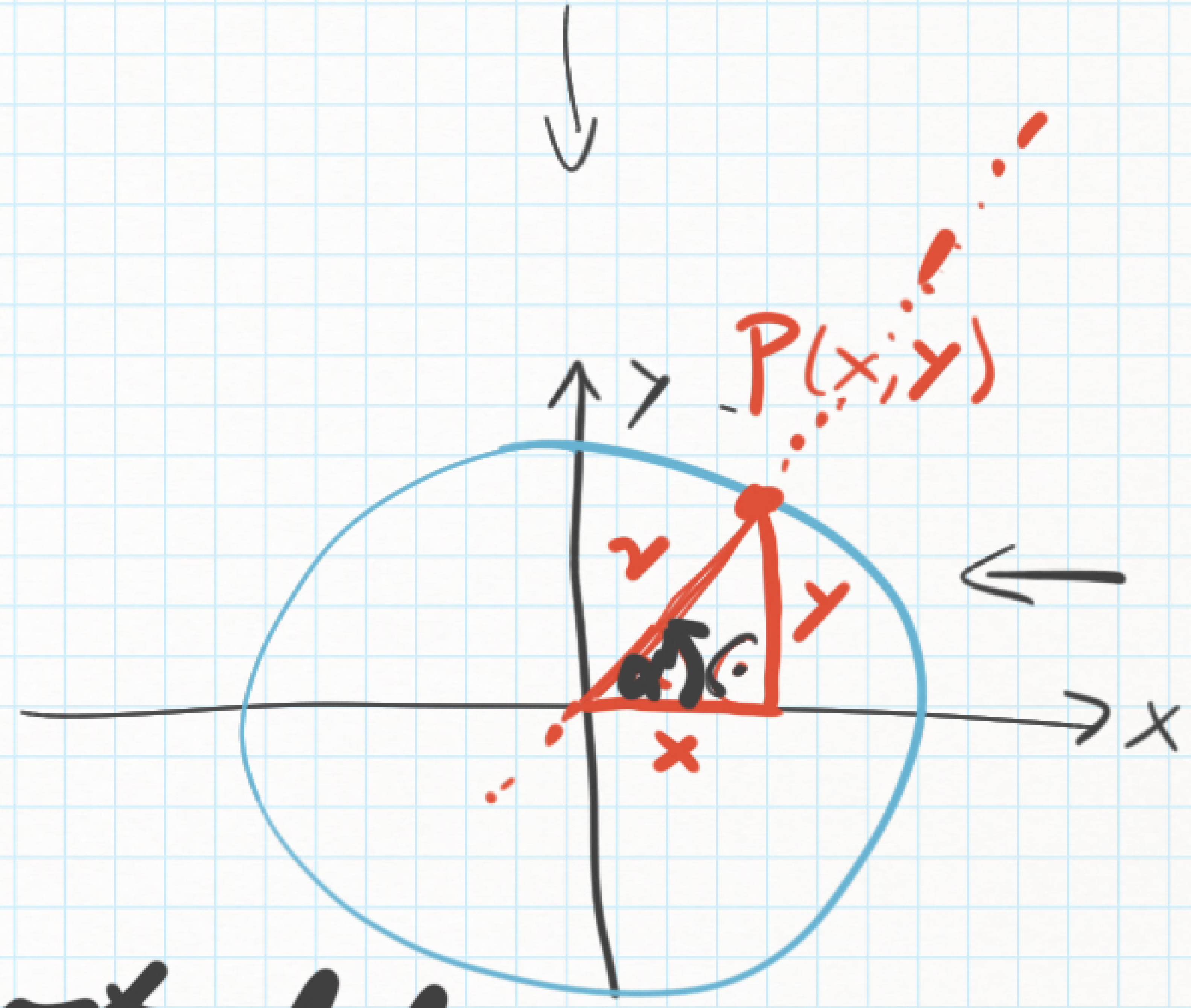


Rechenregeln: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

Anwendung:

$$\ln(1) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln x - \ln x = 0$$



4.3 Trigonometrische Funktion:

Punkt $P(x,y)$ auf Kreis mit Radius r

Pythagoras: $x^2 + y^2 = r^2$

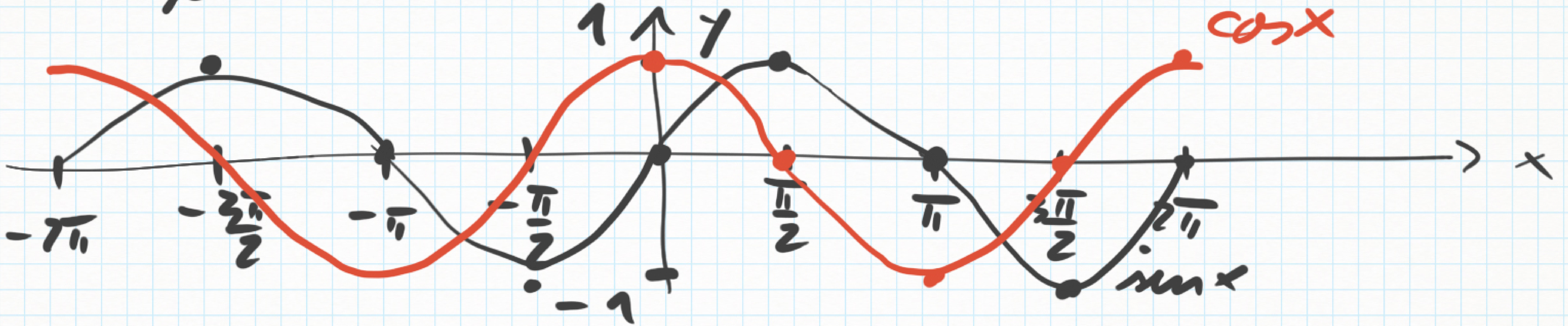
Winkel α zwischen x-Achse und dem Fahrstrahl vom Ursprung zum Punkt $P(x,y)$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{x}{r}$$

Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen:

α in Gradmaß	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$

Graph der trigonometrischen Funktionen:



Eigenschaften trigonometrischer Funktionen:

- Sinus ungerade: $\sin(-x) = -\sin x$
- Kosinus gerade: $\cos(-x) = \cos x$
- Trigonometrische Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Trigonometrische Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

- Anwendung:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \cos\alpha \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = \cos\alpha:$$

Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben ergibt Kosinusfunktion

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \sin\alpha \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = \sin\alpha:$$

Kosinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben ergibt Sinusfunktion

• Weitere Anwendung:

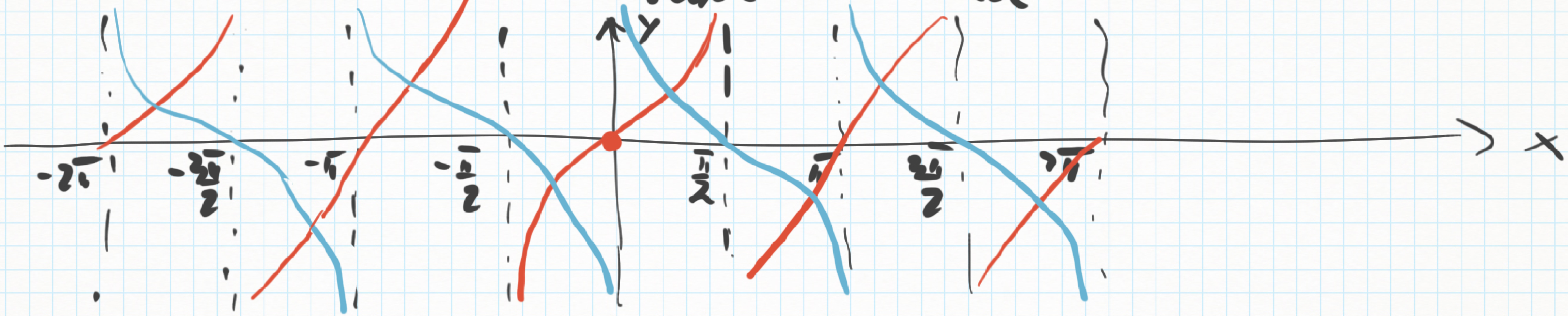
$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}} \\ 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Leftarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}}$$

• Weitere trigonometrische Funktionen:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$



- Winkelfunktion:

  $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arcctg} x$

  $\Rightarrow$ Verweis auf einschlägige Literatur