4.4 Grenzwerte von Funktionen:

Wie verhält sich $f(x)$ von $f: D \to \mathbb{R}$, wenn sich x einem Punkt $a \in \bar{D}$ annähert? Mögliche Definitionsbereiche:

- offen, z.B. (a, b)
- halboffen, z.B. $(a, b]$
- abgeschlossenen, z.B. $[a, b]$

$\bar{D}$ bezeichnet Abschluß von D. Es sei nun $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \bar{D}$. Wir nennen $y \in \mathbb{R}$ Grenzwert von f in a, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ und $a_n \to a$ auch $f(a_n) \to y$ gilt. Schreibweise:
$$y = \lim_{x \to a} f(x)$$

Bemerkung: $y = \pm\infty$ als uneigentliche Grenzwerte sind erlaubt

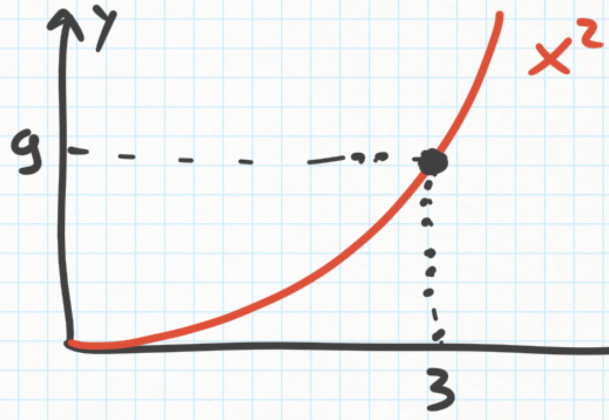
4.5 Beispiele:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, $a = 3$.

Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to 3$, dann gilt

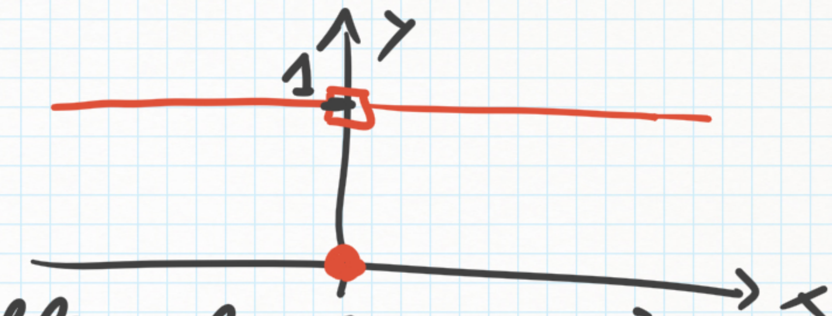
$$f(a_n) = a_n^2 \longrightarrow 3^2 = 9$$

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$



b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abschnittsweiser Definition

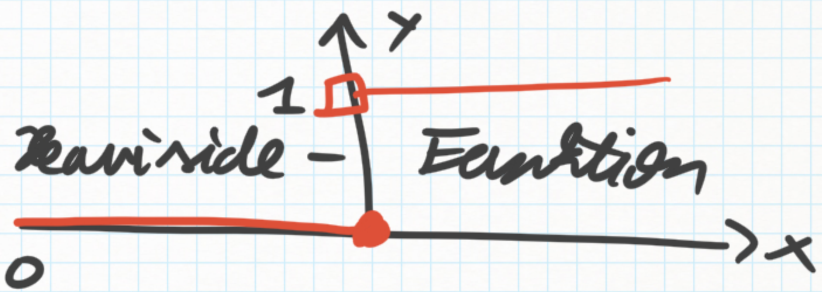
$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$



und $a = 0$. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, also $a_n \to 0$ mit $a_n \neq 0$.
Dann gilt $f(a_n) = 1 \longrightarrow 1$, d.h. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abschnittsweiser Definition

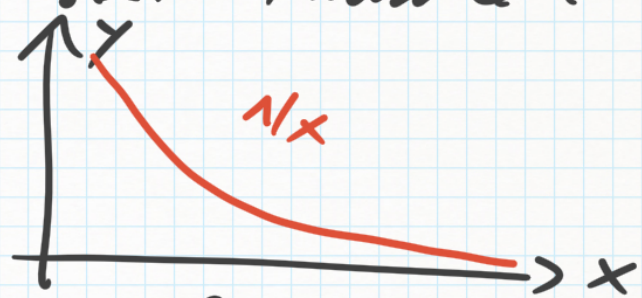
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$



und $a = 0$. Für Nullfolge $a_n = -\frac{1}{n} \to 0$ gilt $f(a_n) = 0 \to 0$ und $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ hat $f(a_n) = 1 \to 1 \neq 0$

Es gibt keinen eindeutigen Grenzwert von $f(x)$ im Punkte $a = 0$

d) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

4.6 Definition:

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in D$, falls $\underbrace{\lim_{x \to a} f(x)}_{\text{Grenzwert}} = \underbrace{f(a)}_{\text{Funktionswert}}$

f heißt stetig auf D, wenn f in jedem Punkt in D stetig ist.

4.7 Beispiele:

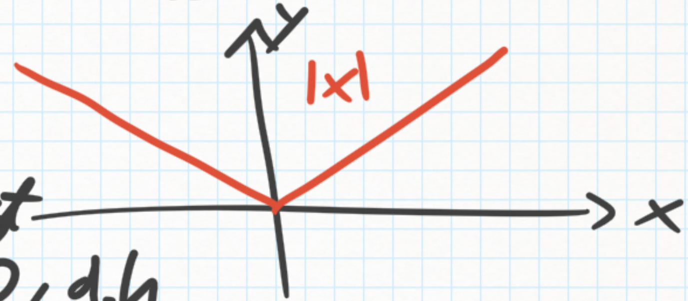
a) Jede Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

ist stetig.

b) Jede rationale Funktion $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0 \} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, wobei f, g Polynomfunktionen sind.

c) Betragsfunktion: $f(x) = |x|$



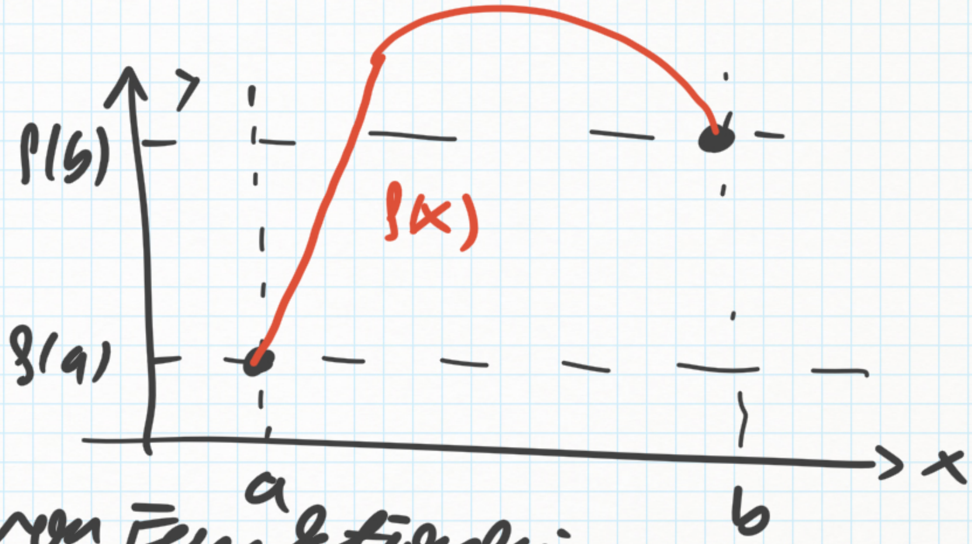
ist für $x \neq 0$ stetig. Stetigkeit auch in $x = 0$?
Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \to 0$ folgt mit Hilfe der Grenzwertsätze: $|a_n| \to 0$, d.h.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

d) Exponential-, Kosinus- und Sinusfunktion sind stetig.

4.8 Zwischenwertsatz: ohne Beweis

Eine stetige Funktion $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



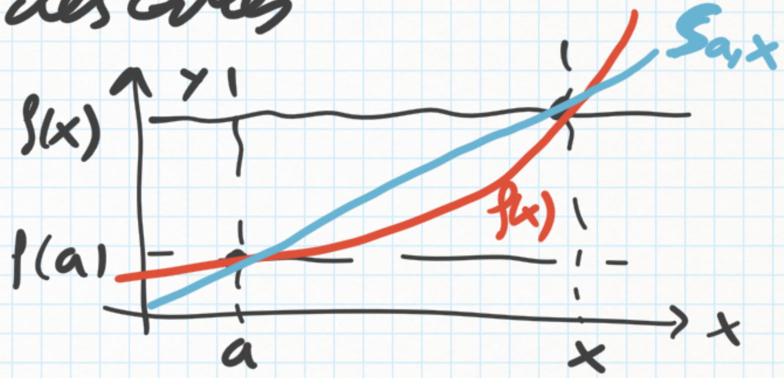
5. Differenzierbarkeit und Ableitung von Funktionen:

- grundlegend in der Physik
- z. B. Geschwindigkeit ist die Zeitableitung des Orts

5.1 Sekante:

Sekante $s_{a,x}$ von f durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ hat die Steigung

$$\phi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



5.2. Definition:

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion und $a \in D$. Die Funktion heißt stetig differenzierbar in a, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \phi_a(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir den Grenzwert die Ableitung von f an der Stelle a:

$$f'_a(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Wir nennen f differenzierbar in D, wenn sie in jedem Punkt von D differenzierbar ist.

5.3 Beispiele:

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Sekantensteigung: $\phi_a(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}$

Wie berechnet man den Grenzwert $x \to a$?

Polynomdivision:

$$(x^n - a^n) : (x-a) = x^{n-1} + a\cdot x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \dots + a^{n-1}$$

$$x^n - a\cdot x^{n-1}$$

$$a x^{n-1} - a^n$$

$$a x^{n-1} - a^2 x^{n-2}$$

$$a^2 x^{n-2} - a^n$$

$$a^2 x^{n-2} - a^3 x^{n-3}$$

$$a^3 x^{n-3} - a^n$$

$$\vdots$$

$$a^{n-1} x - a^n$$

$$a^{n-1} x - a^n$$

$$0$$

Probe:

$$(x-a)\cdot(x^{n-1} + a x^{n-2} + \dots + a^{n-1})$$

$$= x^n + \cancel{a x^{n-1}} + \cancel{a^2 x^{n-2}} + \cancel{\dots} + \cancel{a^{n-1}x} - \cancel{a x^{n-1}} - \cancel{a^2 x^{n-2}} - \cancel{\dots} - a^n$$

$$= x^n - a^n \quad ✓$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \left\{ x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \dots + a^{n-1} \right\}$$

$$= n\cdot a^{n-1}$$

b.) Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $a > 0$: Sekantensteigung

$$\varphi_a(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{a}}}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

Ableitung: $$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

c) Verallgemeinerung von a) und (b): $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Ableitung $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

d) Ableitung eines Polynoms:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \underset{k=l+1}{\overset{l=k-1}{=}} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)\, a_{l+1}\, x^{l}$$

5.4 Wichtige Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$

Fakultät

$$\frac{1}{k!}\,k = \frac{\cancel{k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\cancel{k}} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)} = \frac{1}{(k-1)!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\,; \quad (e^x)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\,k\,x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\,x^{k-1}$$

$$\underset{k=l+1}{\overset{l=k-1}{=}} \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\,x^l = e^x$$

analog: $\cos x$, $\sin x$

5.5 Rechenregeln: ohne Beweis

$f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ differenzierbar

a) Summregel: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

b) Faktorregel: $(c\, f)'(a) = c\, f'(a)$; $c \in \mathbb{R}$

c) Produktregel: $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

d) Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$; $g(a) \neq 0$

e) Kettenregel: $f(g(a))' = \underbrace{f'(g(a))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{g'(a)}_{\text{innere Ableitung}}$

5.6 Beispiele:

a) $f(x) = 3 \cdot \tan x + x^3 = 3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + x^3$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} + 3x^2 = 3 \cdot \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{= 1 \text{ (trigonom. Pythagoras)}}}{\cos^2 x} + 3x^2 = \frac{3}{\cos^2 x} + 3x^2$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$

$\longrightarrow$ Kettenregel

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

5.7 Ableitung der Umkehrfunktion:

Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und Umkehrfunktion $f^{-1}: S \rightarrow D$.

Es gilt: $f^{-1}(f(a)) = a, \quad a \in D$

Ableitung nach a mit Kettenregel:

$f^{-1\prime}(f(a)) \cdot f'(a) = 1 \Rightarrow f^{-1\prime}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

Substitution: $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$

$$\boxed{f^{-1\prime}(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

Ableitung der Umkehr-funktion = Reziproke der Ableitung der Funktion

5.8 Beispiel:

a) Ableitung des Logarithmus:

$$y = f(x) = e^x \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \ln y$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow ?$$

$$f'(x) = e^x \longrightarrow f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

b) Ableitung der Arkustangensfunktion:

$$y = f(x) = \tan x \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \arctan y$$

?

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}$$

trigonometrische Pythagoras

$$\tan^2 y \cdot \cos^2 y = 1 - \cos^2 y$$

$$(1+\tan^2 y)\cdot \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$