5.9 Höhere Ableitungen:

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ auf Intervall D differenzierbar. Ist dann die Funktion f' in $a \in D$ differenzierbar, so bezeichnen wir deren Ableitung an der Stelle a mit $f''(a)$. Existiert $f''(x)$ für jedes $x \in D$, so wird die Funktion $f''(x)$ als zweite Ableitung von f auf D bezeichnet. Im allgemeinen Fall wird $f^{(n)}(x)$ als $n$te Ableitung von f bezeichnet.

5.10 Kritische Punkte und Extremwerte:

Ableitung von $f(x)$ = Steigung der Tangente am Punkt x

Ein kritischer Punkt ist ein Punkt mit horizontaler Tangente

$$f'(x_0) = 0 \iff x_0 \text{ ist ein kritischer Punkt}$$

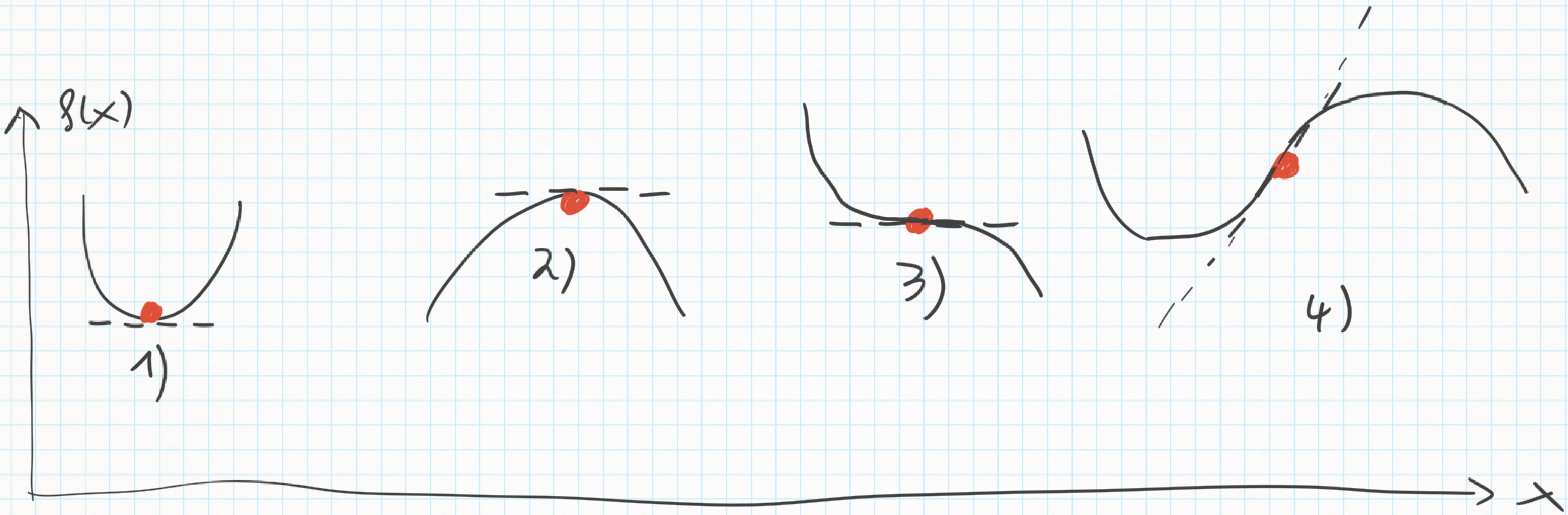
Klassifikation:

1) $f''(x_0) > 0$: Minimum   2) $f''(x_0) < 0$: Maximum

3) $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$: Sattelpunkt

Außerdem ist für Kurvendiskussion wichtig

4) $f'(x_0) \neq 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$: Wendepunkt

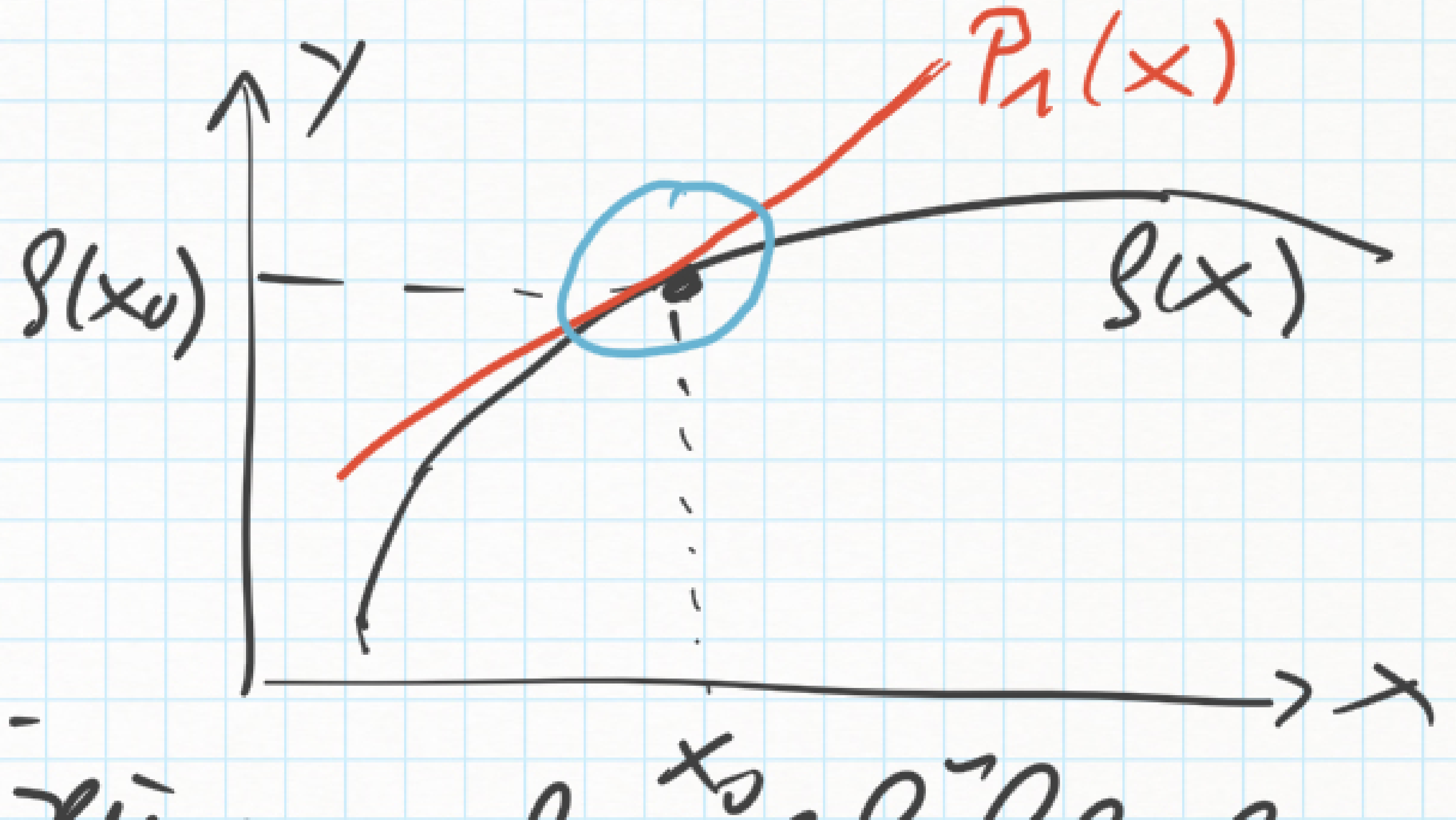


6. Taylor-Reihe:

- Oft möchte man $y = f(x)$ in einer Umgebung um x_0 nicht ganz genau wissen und ist schon mit einer Näherung zufrieden.
- Ist $y = f(x)$ an Stelle x_0 mehrfach stetig differenzierbar, dann kann man $y = f(x)$ in der Umgebung um x_0 systematisch approximieren durch eine Taylor-Reihe.

6.1 Tangente:

Ist $f(x)$ stetig differenzierbar, dann ist die Tangente am Punkt $(x_0, f(x_0))$ durch ein Polynom 1. Ordnung gegeben:

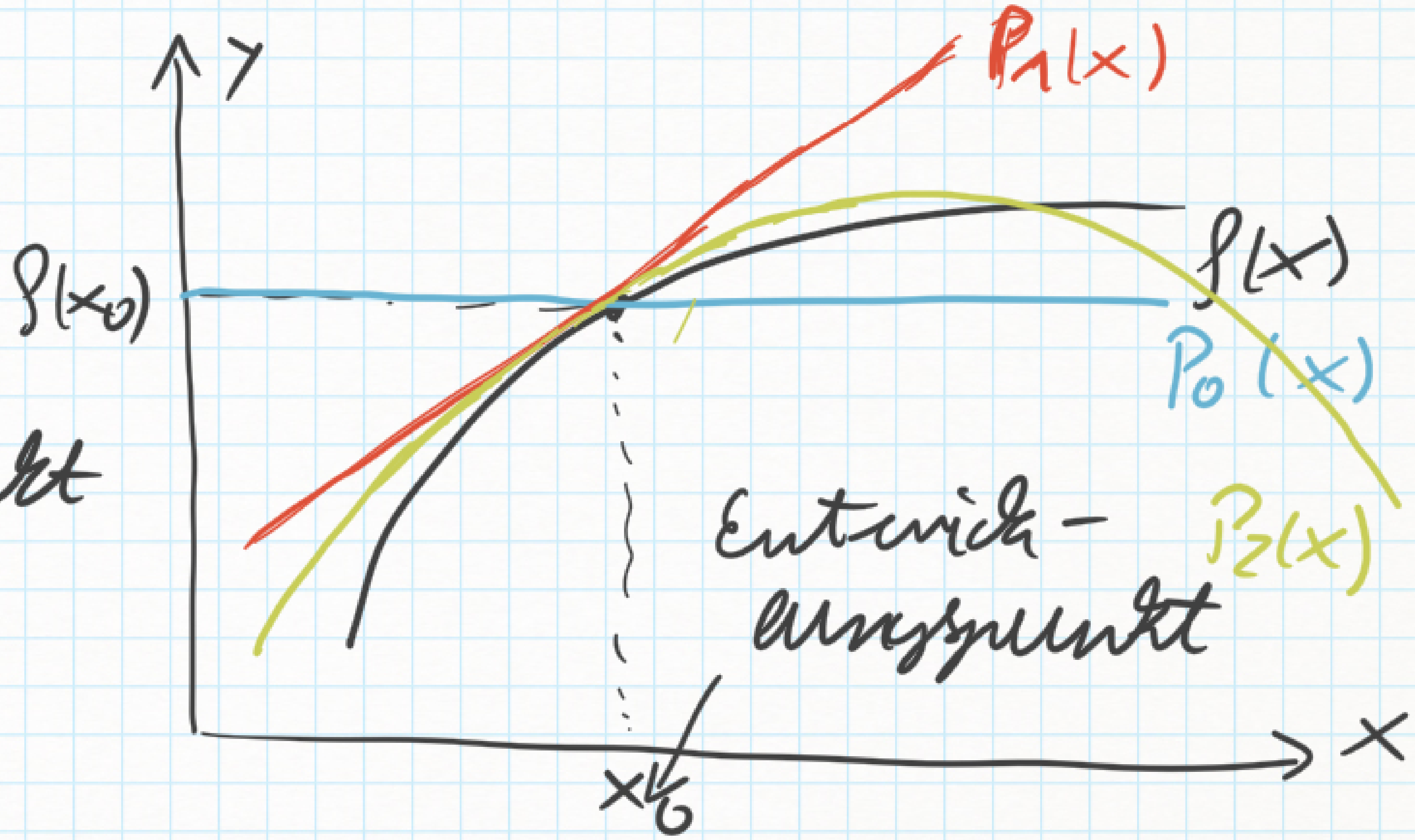


$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Approximation von $f(x)$ in der Umgebung von x_0. Durch Hinzunahme höherer Ableitungen läßt sich $f(x)$ in der Umgebung von x_0 noch besser beschreiben.

6.2 Herleitung:

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ n-fach stetig differenzierbar, d.h. die n-te Ableitung ist stetig. Wir nähern jetzt $f(x)$ durch ein Polynom n-ter Ordnung an:



Entwicklungspunkt

$$f(x) \approx P_n(x) = a_0 + a_1(x-\overset{\downarrow}{x_0}) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Hierbei sind die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ noch zu bestimmen.

Ableitung:

$$f'(x) \approx P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots + n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) \approx P_n''(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) \approx P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 \; a_n = n!\,a_n$$

Forderung: Polynom $P_n(x)$ soll Funktion $f(x)$ bestmöglichst approximieren. Setze $x = x_0$

$f(x_0) \approx P_n(x_0) = a_0$ $\quad f''(x_0) \approx P_n''(x_0) = 2a_2$

$f'(x_0) \approx P_n'(x_0) = a_1$ $\quad f^{(n)}(x_0) \approx P_n^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$

$\Rightarrow$ alle Koeffizient festgelegt

$a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, $a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}$, $\dots$ $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

gesuchtes Polynom:

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Je größer n wird, um so genauer approximiert das Polynom $P_n(x)$ die Funktion $f(x)$ in der Umgebung um den Entwicklungspunkt x_0.

Im Limes $n \to \infty$ folgt hieraus die Taylor-Reihe von $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Bemerkungen:

- Taylor-Reihe konvergiert nicht immer $\Leftarrow$
- Und wenn Taylor-Reihe konvergiert, dann konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f.

6.3 Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$:

$f(x) = e^x$, $f(0) = 1$ $\qquad$ $f^{(2)}(x) = e^x$, $f''(0) = 1$

$f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$ $\qquad$ $\vdots$ $\quad f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$

Taylor-Reihe der Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

=> wurde schon in Abschnitt 3.4 eingeführt

=> Analog erhält man auch die in Abschnitt 3.4 angegebenen Taylor-Reihen für $\cos x$, $\sin x$

6.4 Geometrische Reihe:

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ und Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{(-2)(-1)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}$, $f''(0) = 2$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^n}$, $f^{(n)}(0) = n!$

$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Taylor-Reihe = geometrische Reihe

Einschränkung: $|x| < 1$ => Konvergenz der Taylor-Reihe

Achtung: Für $|x| > 1$ divergiert diese Taylor-Reihe!

6.5 Regel von de l'Hôpital:

Motivation: Welchen Wert hat die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ an der Stelle $x=0$?

Problem: $\boxed{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}$ Falls möglich würde man gerne die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ an der Stelle $x=0$ stetig um den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ergänzen.

Regel von de l'Hôpital: Die Funktionen $f: D\to\mathbb{R}$ und $g: D\to\mathbb{R}$ seien auf demselben Bereich D definiert und $\boxed{f(a)=g(a)=0}$ für $a\in D$. Wenn beide Funktionen in $a\in D$ differenzierbar sind mit $g'(a)\neq 0$ so gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

falls der letzte Grenzwert existiert. Beweis der Regel von de l'Hôpital durch Taylor-Reihen der beiden Funktionen, falls diese existieren:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(a)+f'(a)\cancel{(x-a)}+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^{\cancel{2}}+\dots}{g(a)+g'(a)\cancel{(x-a)}+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)^{\cancel{2}}+\dots}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^2+\dots}{g'(a)+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)+\frac{1}{6}g'''(a)(x-a)^2+\dots}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Verallgemeinerung der Regel von de l'Hôpital: Es seien $f(x): D \to \mathbb{R}$ und $g(x): D \to \mathbb{R}$ auf D differenzierbare Funktionen mit

$$f(a) = g(a) = 0,\ f'(a) = g'(a) = 0,\ \dots,\ f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a) = 0$$

sind beide Funktion n-fach in $a \in D$ stetig differenzierbar und $g^{(n)}(a) \neq 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

falls der Grenzwert existiert.

1. Beispiel: $f(x) = \sin x,\ g(x) = x;\ f'(x) = \cos x,\ g'(x) = 1$

$\Rightarrow f(0) = 0 = g(0),\ g'(0) = 1 \neq 0$

Voraussetzungen der Regel von de l'Hôpital sind erfüllt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Beispiel: $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin^2 x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2x} \overset{\text{Additionstheoreme}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 2x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos 2x}{2} = 1$$

6.6 Identitätssatz für Polynome: Ohne Beweis

Liegt ein- und dieselbe Funktion durch zwei Potenzreihen vor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

dann stimmen die Entwicklungskoeffizienten überein

$$a_n = b_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}_0$$

6.7 Anwendung für Potenzreihen:

Naives Wachstumsproblem: Anfangswertproblem

Wachstumsfaktor

$$\begin{cases} \text{Differentialgleichung:} & \dot{x}(t) = c \cdot x(t) \; ; c \in \mathbb{R} \\ \text{Anfangsbedingung:} & x(0) = x_0 \end{cases}$$

Lösungsansatz durch Potenz-Reihe

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n \quad (*)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n t^{n-1} \underset{n = n'+1}{\overset{n' = n-1}{=\!=}} \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1) \alpha_{n'+1} t^{n'}$$

Einsetzen in DGL:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c \alpha_n t^n$$

Identitätssatz für Polynome

$$(n+1) \alpha_{n+1} = c \alpha_n$$

Rekursionsbeziehung: $\alpha_{n+1} = \frac{c}{n+1} \alpha_n \; ; \quad n \in \mathbb{N}_0$

Lösung durch vollständige Induktion:

- Induktionsannahme: $\boxed{\alpha_n = \frac{c^n}{n!} \alpha_0} \quad (**)$ $\Rightarrow$ Lösung der Rekursionsbeziehung
- Induktionsanfang: $n = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_0$ ✓
- Induktionsschritt: Folgerung von n zu $n+1$

$$\alpha_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rekursion}}}{=} \frac{c}{n+1} \alpha_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Annahme}}}{=} \frac{c}{n+1} \cdot \frac{c^n}{n!} \alpha_0 = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \alpha_0$$

$\hat{=}$ Induktionsannahme für $n+1$

$$\alpha_1 = \frac{c}{1} \alpha_0 = c \alpha_0$$

$$\alpha_2 = \frac{c}{2} \alpha_1 = \frac{c}{2} \cdot c \alpha_0 = \frac{c^2}{2} \alpha_0$$

$$\alpha_3 = \frac{c}{3} \alpha_2 = \frac{c}{3} \cdot \frac{c^2}{2} \alpha_0 = \frac{c^3}{6} \alpha_0 = \frac{c^3}{3!} \alpha_0$$

(**) in (*) einsetzen: $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \alpha_0 \cdot t^n$

Bestimmung von α_0: Anfangsbedingung

$x(0) = \alpha_0 = x_0 \implies x(t) = x_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} = x_0 e^{ct}$

Covid-Beispiel: Wachstumfaktor $c = \ln R$