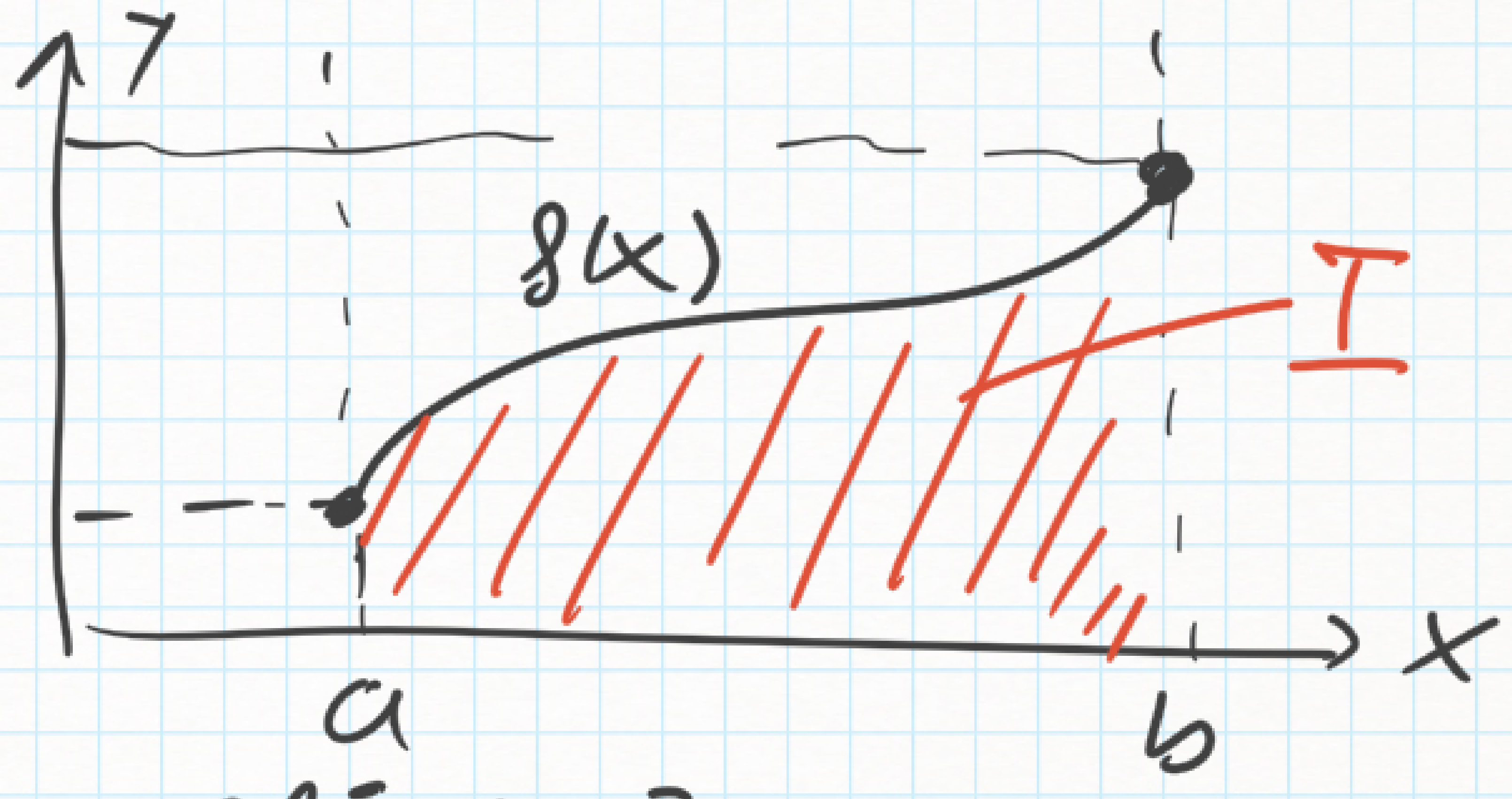
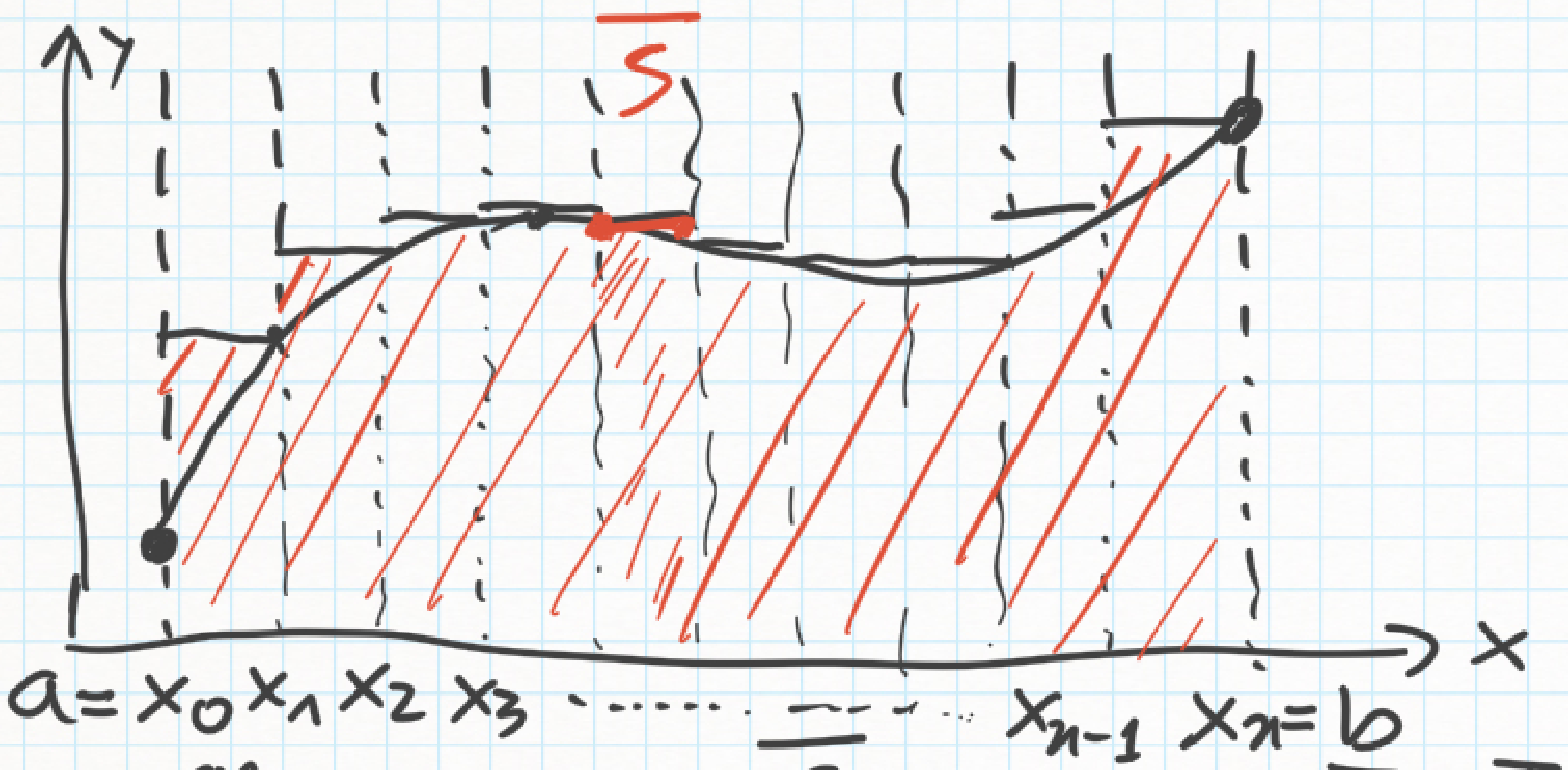
7. Integralrechnung:

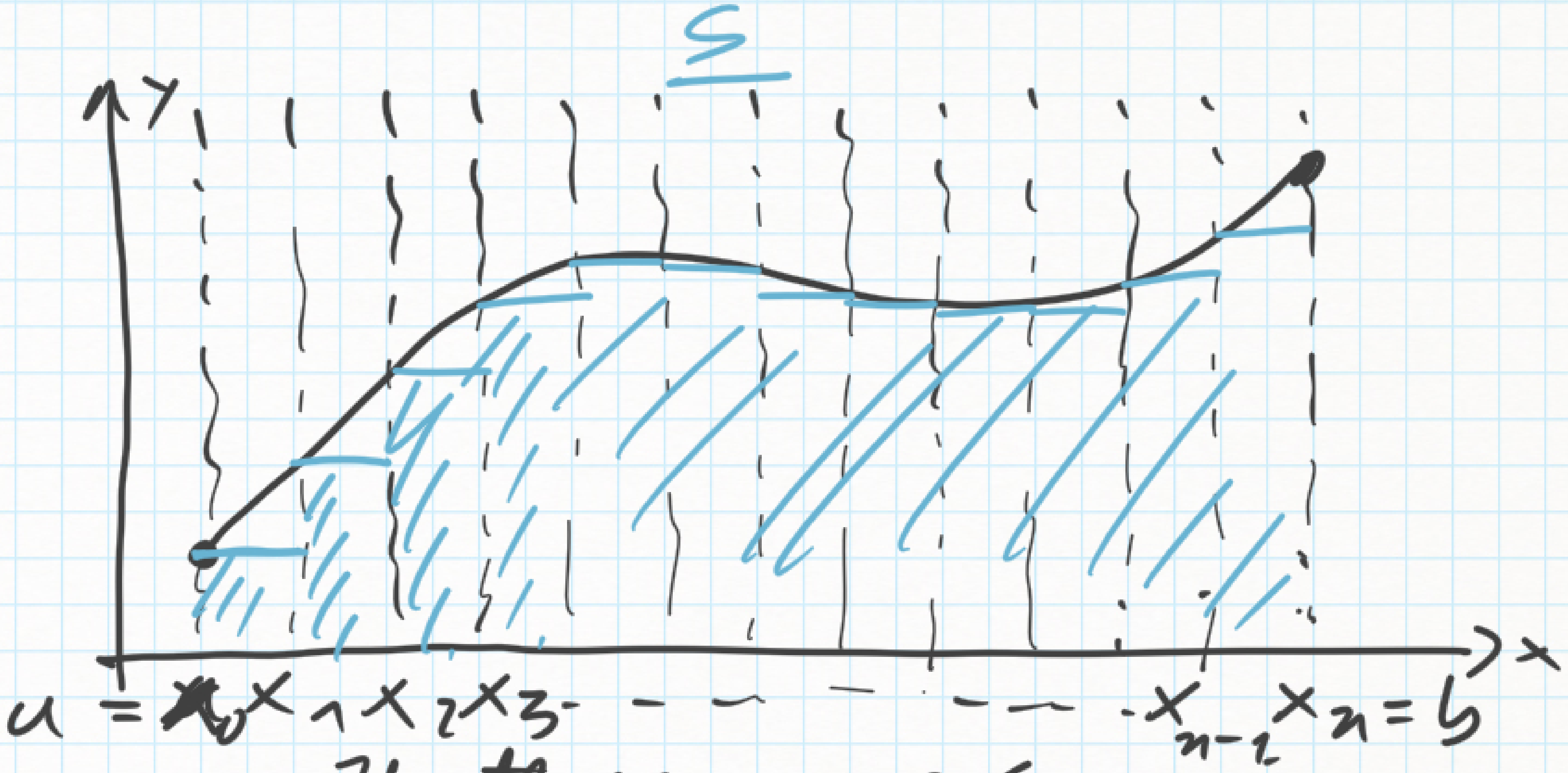
Motivation:

- Integration = Umkehroperation der Differentiation
- Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wie groß ist der Flächeninhalt I, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt?



7.1 Integrierbarkeit und Integral:





Obersumme $\overline{S}$ $\geq I \geq$ Untersumme $\underline{S}$

Zerlegung des Intervalls $[a,b]$: $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt $Z = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ mit $n \geq 1$ eine Zerlegung des Intervalls falls

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Dann lässt sich der gesuchte Flächeninhalt I durch eine Obersumme $\overline{S}$ nach oben und eine Untersumme $\underline{S}$ nach unten abschätzen.

Neue Begriffsbildung: Es sei M eine nichtleere Menge M in $\mathbb{R}$, d.h. $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $S \in \mathbb{R}$ eine obere (untere) Schranke von M, falls $x \leq S$ ($x \geq S$) für alle $x \in M$. Beachte, dass S nicht unbedingt Element von M sein muss. Und S ist nicht eindeutig.

Beispiel: $M = [1,2]$. Alle $S \leq 1$ ($S \geq 2$) sind untere (obere) Schranken von M. Um den Begriff der Schranke eindeutig zu machen, führt man ein:

- kleinste obere Schranke von M (supremum): $\sup(M)$
- größte untere " " " (infimum): $\inf(M)$

$\sup\{[1,2]\} = 2$
$\inf\{[1,2]\} = 1$

Anwendung auf Ober- und Untersumme von f bezüglich einer beliebigen Zerlegung Z:

$$\overline{S}(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\underline{S}(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

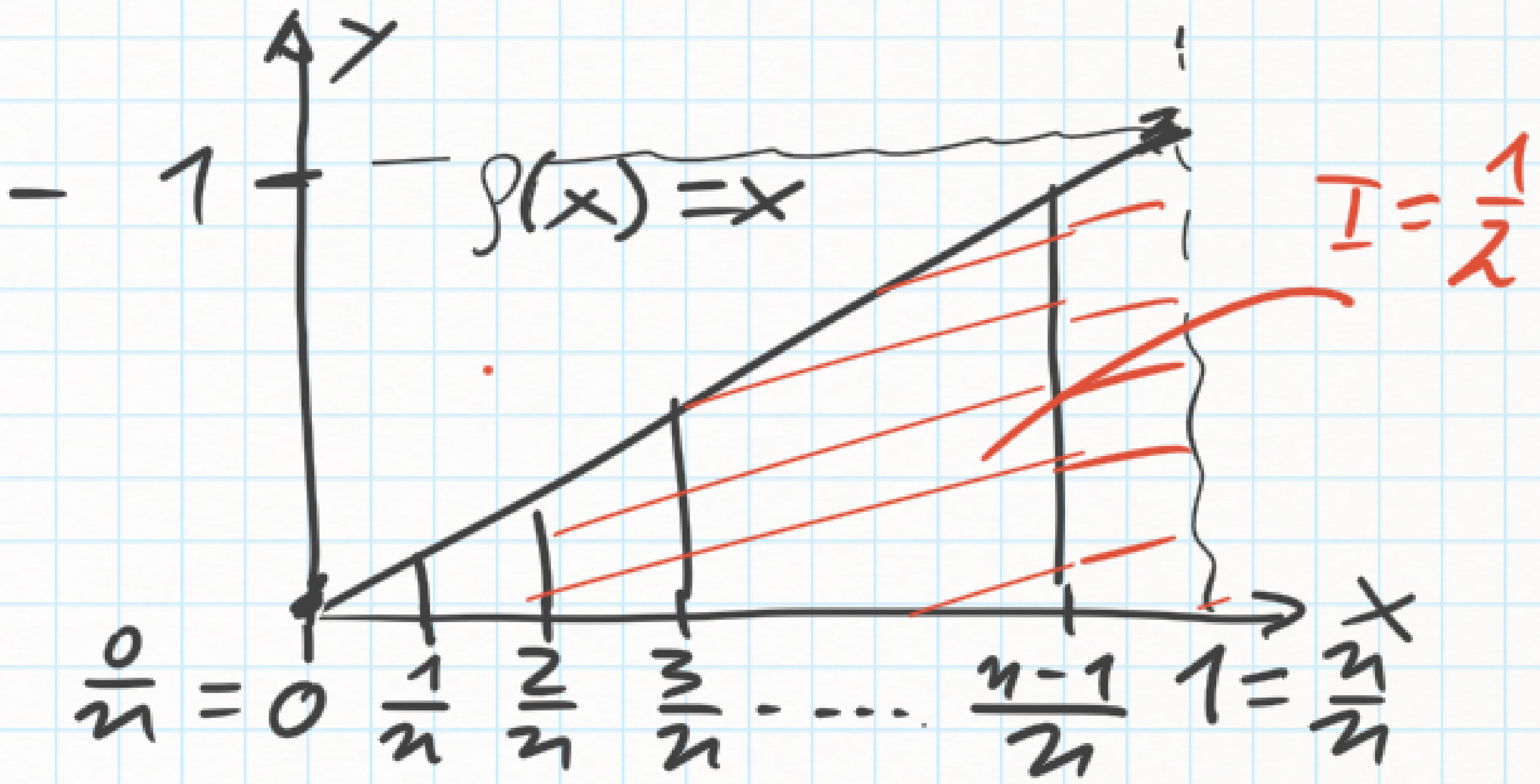
Der konkrete Wert von $\overline{S}(f, Z)$ und $\underline{S}(f, Z)$ hängt von der Wahl der Zerlegung ab. Daher definiert man nun das Oberintegral $\overline{I}(f)$ bzw. das Unterintegral $\underline{I}(f)$ dadurch, dass man eine Zerlegung findet, bei der die Obersumme $\overline{S}(f, Z)$ bzw. die Untersumme $\underline{S}(f, Z)$ möglichst klein bzw. groß ist.

$$\left.\begin{aligned} \overline{I}(f) &= \inf \{ \overline{S}(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b] \} \\ \underline{I}(f) &= \sup \{ \underline{S}(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b] \} \end{aligned}\right\} \quad \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$$

Definition des Integrals I: f ist integrierbar, falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Dann heißt $\int_a^b f(x)\,dx = \overline{I}(f) = \underline{I}(f) \in \mathbb{R}$ das Integral von f auf $[a,b]$.

7.2 Beispiel:

$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$, äquidistante Zerlegung von $[0,1]$



$$Z_n = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$$

$$[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]; \quad i = 1, \dots, n$$

Monoton wachsende Funktion:

$$\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$$

$$\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i = \frac{i}{n}$$

Untersumme:

$$\underline{S}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{= \frac{1}{n}} \cdot \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2}\left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{= ?} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{= n} \right\}$$

Gauß Summe: $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$, Beweis über vollständige Induktion

Erzeugende Funktion: $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} i x^{i-1} \Rightarrow S_n(1) = S_n$

Erzeugende Funktion: $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} i\, x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} (x^i)' = \left(\sum_{i=1}^{n} x^i\right)'$

$$\underset{i=k+1}{\overset{k=i-1}{=}} \left(x \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)' \underset{\uparrow}{=} \left(x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}\right)'$$

geometrische Partialsumme, siehe Abschnitt 3.2

Produkt- und Quotientenregel der Differentiation:

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x} + x \cdot \frac{-n x^{n-1}(1-x) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x^n}{1-x} + x \cdot \frac{1 - n x^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

Regel von de l'Hospital:

$$S_n(1) = \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{(1-x^n)'}{(1-x)'} + \frac{[1 - n x^{n-1} + (n-1)x^n]'}{[(1-x)^2]'} \right\}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-n x^{n-1}}{-1} + \lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{-n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)x^{n-1}}{2(1-x)(-1)}}_{= \frac{1}{2\cancel{(1-x)}}\, n(n-1) \underbrace{(x^{n-2} - x^{n-1})}_{x^{n-2}\cancel{(1-x)}}} = n + \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)$$

Gaußsumme ✓

Untersumme: $\underline{S}(f, Z_n) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1) - n\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

Analoge Berechnung der Obersumme:

$$\overline{S}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}_{n \to \infty:\ \frac{1}{2}} = \underline{S}(f, Z_n) \leq \underbrace{\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)}_{\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \frac{1}{2}} \leq \overline{S}(f, Z_n) = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}_{n \to \infty:\ \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

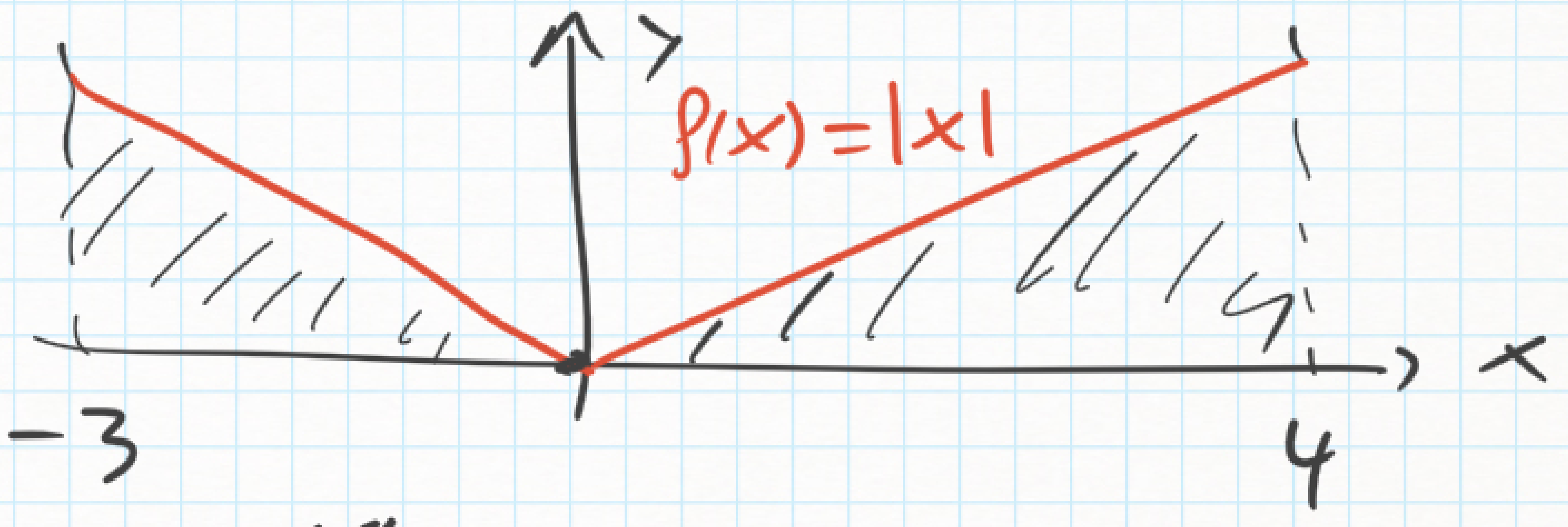
7.3 Integrationsregeln: Ohne Beweis

Es seien $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen sowie $c, d \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $cf + dg$ integrierbar und es gelten:

a) Linearität: $\int_a^b [c f(x) + d g(x)]\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx + d \int_a^b g(x)\,dx$

b) Additivität: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a \le c \le b$

Beispiel: $I = \int_{-3}^{4} |x|\,dx$



$= \int_{-3}^{0} (-x)\,dx + \int_0^4 x\,dx$

$= \frac{1}{2}\,9 + \frac{1}{2}\,16 = \frac{25}{2}$

c) Richtungsänderung: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Beispiel: $\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x) = 0$

Bemerkung: Stetige Funktionen sind integrierbar

7.4 Stammfunktion: Es sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Ferner $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\boxed{F' = f}$. Dann heißt F Stammfunktion. Beispiel: $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \underbrace{C}_{\text{Integrationskonstante}}$

Bemerkung: Die Integrationskonstante C ist essentieller Bestandteil der Stammfunktion und darf nicht weggelassen werden.

7.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) Es sei $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\boxed{F(y) = \int_a^y f(x)\,dx}$. Dann ist F eine Stammfunktion von f.

b) Je zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 von f unterscheiden sich nur um eine Konstante.

c) Ist F Stammfunktion von f, so gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Wir beweisen nun diese Aussagen im Einzelnen:

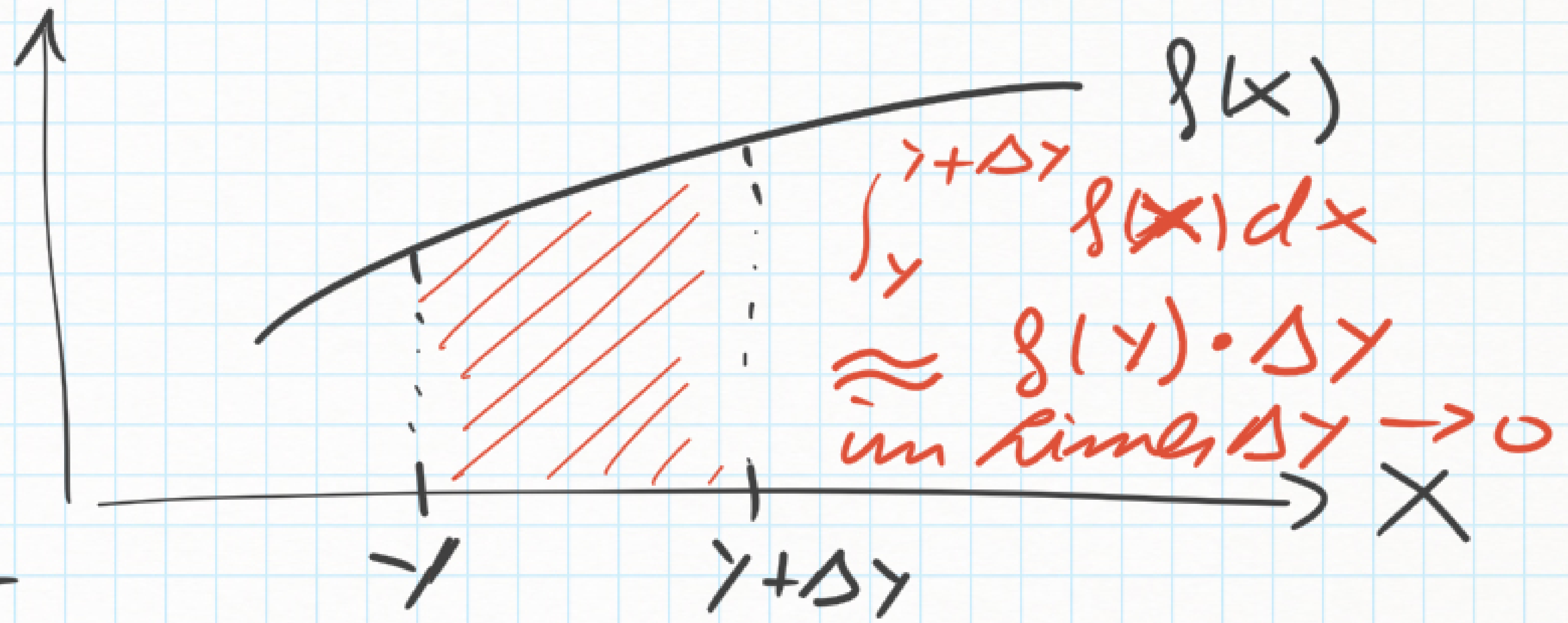
Ad a) Damit F Stammfunktion von f ist, muss laut Abschnitt 7.4 gezeigt werden, dass $F'(y) = f(y)$ ist.

$$F'(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. der Ableit.}}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von F}}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left\{ \underbrace{\int_a^{y+\Delta y} f(x)\,dx}_{\substack{\text{Additivität der Integration} \\ \cancel{\int_a^y f(x)dx} + \int_y^{y+\Delta y} f(x)\,dx}} - \cancel{\int_a^y f(x)dx} \right\} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\int_y^{y+\Delta y} f(x)dx}{\Delta y}$$

$$F'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} f(y)\,\Delta y = f(y)$$

$\Rightarrow$ F Stammfunktion von f



Ad b): Wenn F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, dann gilt: $F_1' = f$ und $F_2' = f$

$\Rightarrow F_1' - F_2' = (F_1 - F_2)' = f - f = 0 \Rightarrow$ Ableitung von $(F_1 - F_2)(x)$ verschwindet für alle $x \in [a,b] \Rightarrow (F_1 - F_2)(x) =$ konst.

Ad c): Aus a) folgt $F_1(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ ist eine Stammfunktion von f. Aus b) folgt dann, dass jede Stammfunktion von f gegeben ist durch

$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx + C \Rightarrow$ Auswertung an $x = a$, $x = b$

$$\left.\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(x)\,dx + C \\ F(a) &= \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{\equiv 0,\ \text{siehe oben}} + C = C \end{aligned}\right\} \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

unabhängig von Integrationskonstante C

Bezeichnungen:

Es sei $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f mit

$$[F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dann heißt $\int^y f(x)\,dx$ unbestimmtes Integral, während $\int_a^b f(x)\,dx$ wird als bestimmtes Integral bezeichnet.

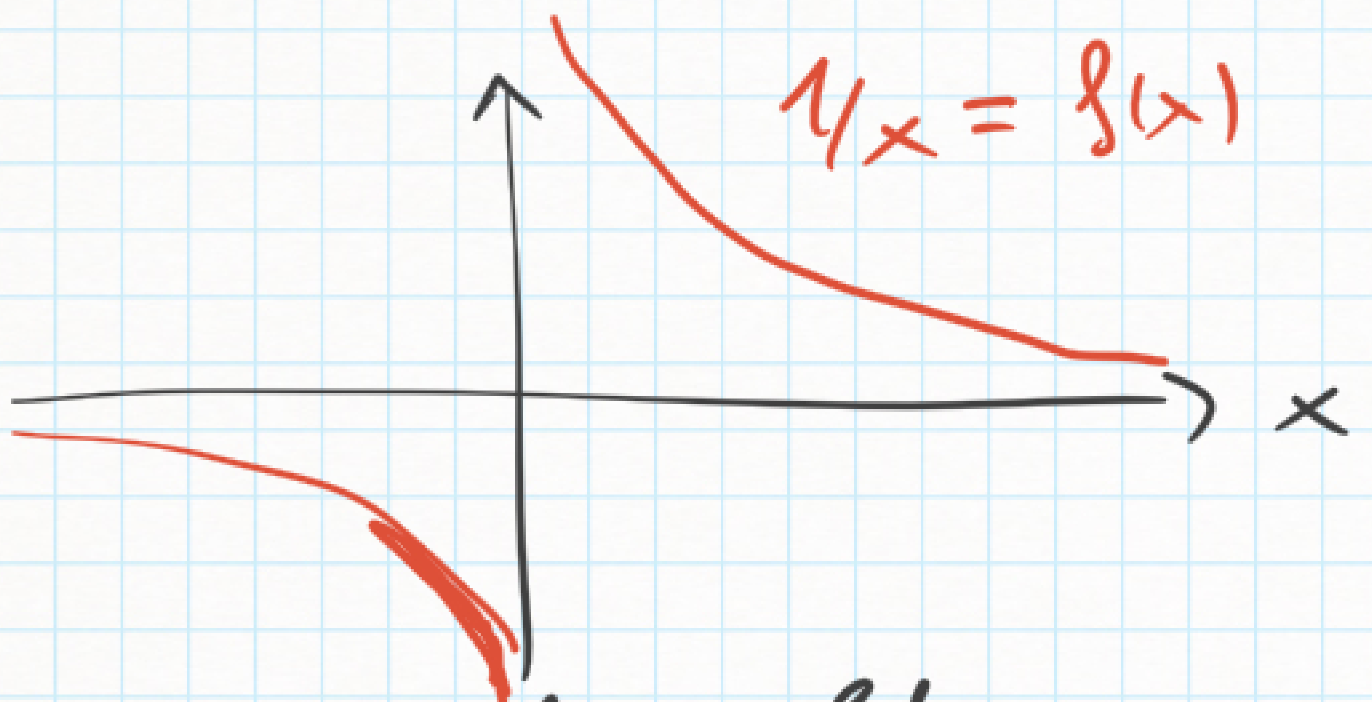
Tabelle von Integralen wichtiger Funktionen:

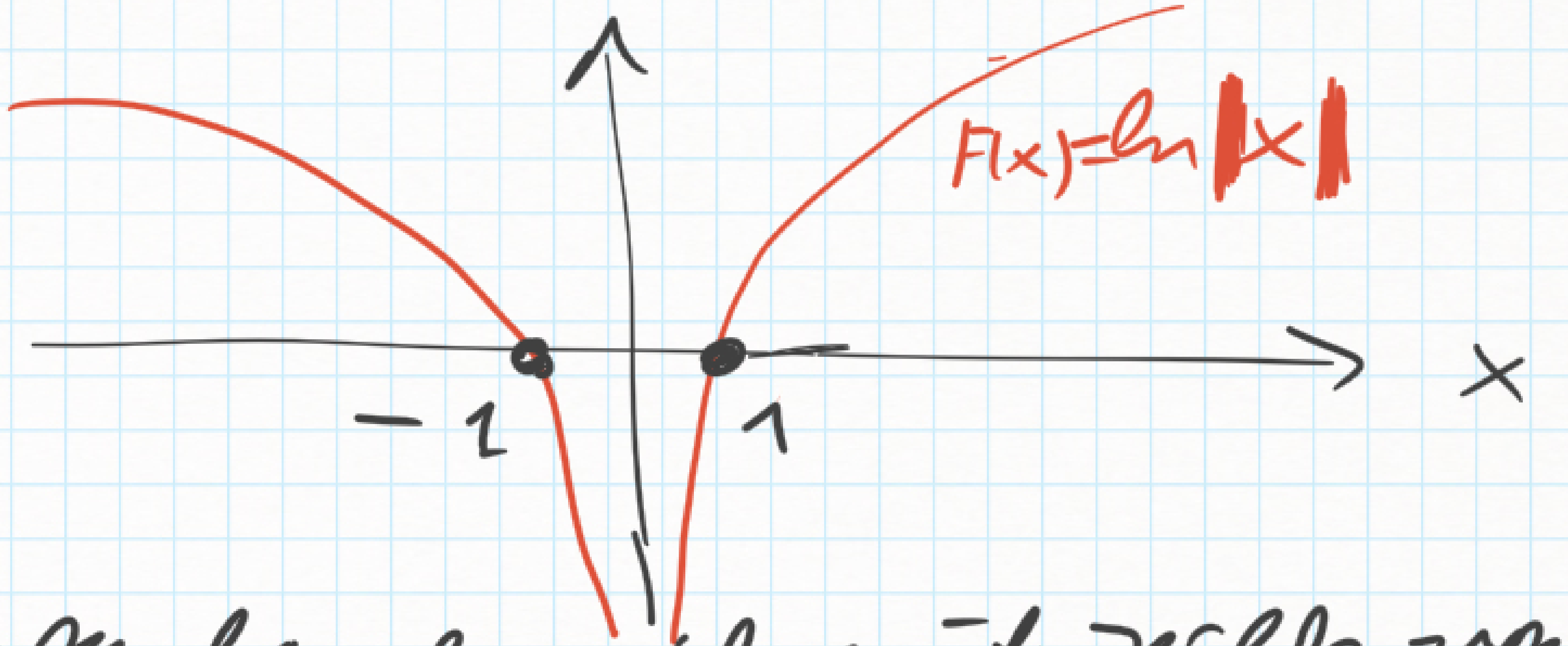
Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x) = \int^x f(y)\,dy + c$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$

$f(x)$	$F(x) = \int^x f(y)\,dy + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$ (*)

(*) $x > 0: (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x < 0: (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$





Diese und weitere Stammfunktionen lassen sich mit Hilfe von nützlichen Integrationsmethoden herleiten, die im Folgenden zusammengestellt werden.

7.7 Partialbruchmethode:

Anwendbar auf Integrale über Quotienten von Polynomen. Erläuterung anhand eines Beispiels: $\int \frac{7x+1}{x^2-x-2}\,dx$

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$a=2,\ b=-1$

Quotient von Polynomen wird in Summe einfacher Brüche (= Partialbrüche) zerlegt:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots = \frac{+\ +\ +}{\text{Hauptnenner}}$$

a, b, c, ... Nenner von Q(x)

einzelne Partialbrüche