7.7 Partialbruchzerlegung:

$$\int^y \underbrace{\frac{7x+1}{x^2-x-2}}_{\text{Bruch}}\, dx = \int^y \left\{ \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \right\} dx$$

Partialbrüche

$$x^2-x-2 = (x-2)\cdot(x+1)$$

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)} \overset{!}{=} \frac{7x+1}{x^2-x-2} \Rightarrow A(x+1)+B(x-2)=7x+1$$

Koeffizientenvergleich: x^1: $A+B=7$ (1), x^0: $A-2B=1$ (2)

Inhomogenes lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte A, B

(1) − (2): $3B = 6 \Rightarrow B = 2$ (3), (3) in (1): $A = 7 - B = 7 - 2 = 5$

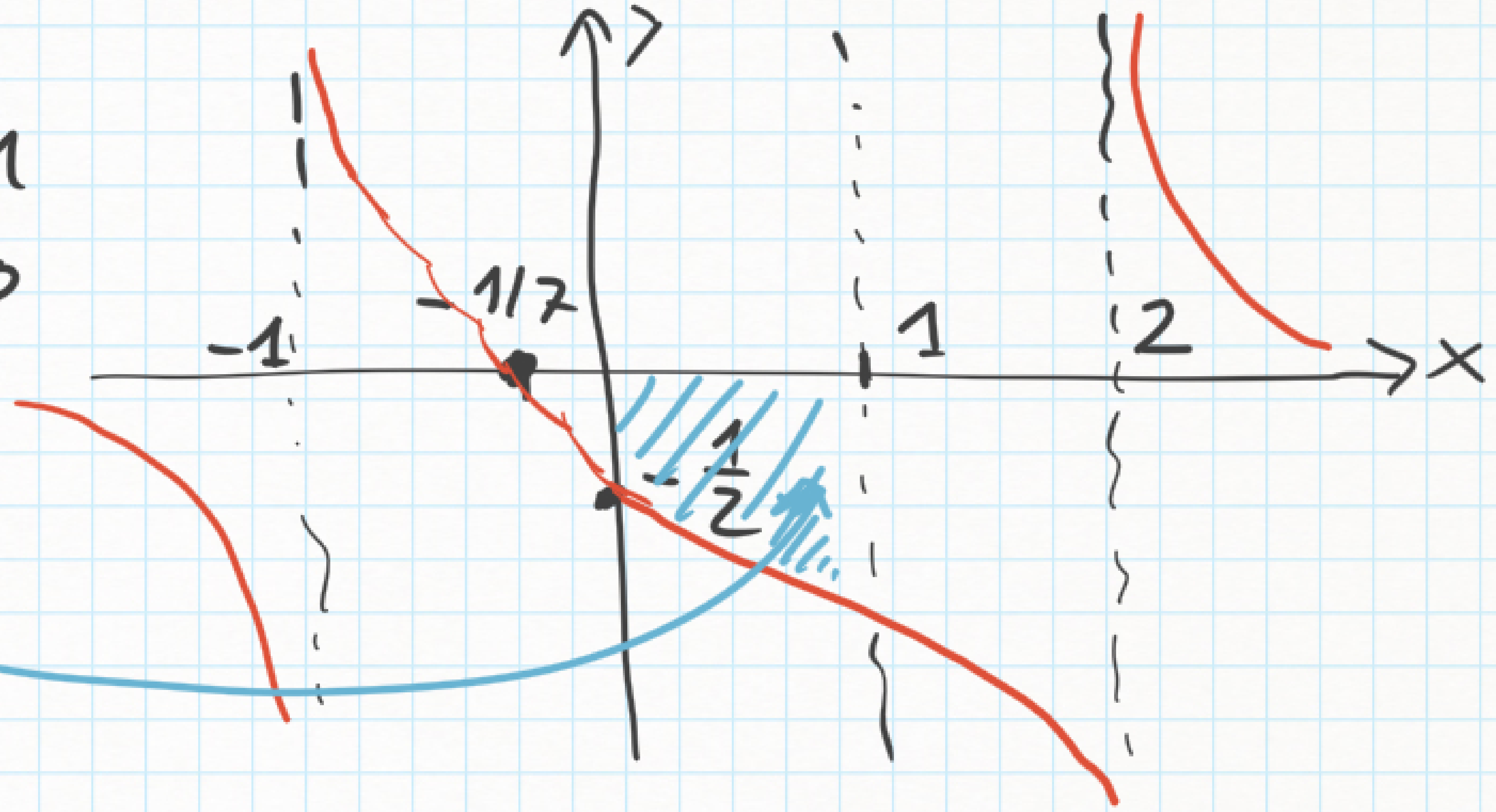
$$5\int^y \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int^y \frac{1}{x+1}\,dx = 5\ln|y-2| + 2\ln|y+1| + C$$

Anwendung: Bestimmtes Integral

$$\int_0^1 \frac{7x+1}{x^2-x-2}\,dx = \Big[5\ln|y-2| + 2\ln|y+1|\Big]_0^1$$

$$= 5(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2) + 2(\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0}) = -3\ln 2$$

orientierter Flächeninhalt



7.8 Partielle Integration:

Es seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b \underline{u(x)\,v'(x)}\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Es handelt sich hierbei um die Umkehrung der Produktregel der Differentiation:

$$(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

$$\underbrace{\int_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx}_{=\left[u(x)\,v(x)\right]_a^b} = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx}_{\text{Umstellung nach diesem Term}}$$

7.9 Beispiel:

a) Bestimmtes Integral: $I = \int_0^\pi \underline{x \cdot \cos x}\,dx$

$u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$ $\Rightarrow$ $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$

$$I = \left[x \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \underline{1 \cdot \sin x\,dx} = \left[x \sin x + \cos x\right]_0^\pi = \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - \underbrace{\cos 0}_{=+1} = -2$$

b) Unbestimmtes Integral: $I(x) = \int^x y^2 \ln y \, dy$

$u(y) = \ln y$, $v'(y) = y^2 \Rightarrow u'(y) = \frac{1}{y}$, $v(y) = \frac{1}{3} y^3$

$$I(x) = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int^x \frac{1}{\cancel{y}} \cdot \frac{1}{3} y^{\cancel{3}\,2}\, dy = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

7.10 Substitutionsregel:

Es seien $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $y: [a,b] \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $S \subseteq D$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(y(x))\, dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y)\; {y^{-1}}'(y) \cdot dy$$

2.) Transformation der Integrationsgrenzen

1.) neue Integrationsvariable

$y = y(x)$, $dy = y'(x)\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{y'(x)}\, dy = \underbrace{\frac{1}{y'(y^{-1}(y))}}_{= {y^{-1}}'(y)}\, dy$

$\Leftrightarrow x = y^{-1}(y)$

$y(y^{-1}(y)) = y \overset{\text{nach}}{\underset{y \text{ diff.}}{\Longrightarrow}} y'(y^{-1}(y)) \cdot {y^{-1}}'(y) = 1$

3.) Transformation des Differentials

7.11 Beispiele:

a) Bestimmtes Integral: $I = \int_0^2 x\, e^{x^2}\, dx$

1. $y = y(x) = x^2$, 2. $y(0) = 0$, $y(2) = 4$

$x = x(y) = y^{-1}(y) = \sqrt{y}$

3. $y = x^2 \Longrightarrow dy = 2x \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} dy \stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$

$I = \int_0^4 \cancel{\sqrt{y}}\, e^y \frac{1}{2\cancel{\sqrt{y}}} dy = \frac{1}{2} \int_0^4 e^y dy = \frac{1}{2}\left[e^y\right]_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$

b) Bestimmtes Integral: $I = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2}\, dx$

1. $y = y(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = x(y) = \sqrt{1-y}$
2. $y(0) = 1$, $y(1) = 0$
3. $y = 1 - x^2$, $dy = -2x\,dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{2x} dy \stackrel{\wedge}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-y}} dy$

$I = \int_1^0 \cancel{\sqrt{1-y}} \sqrt{y} \cdot \frac{-1}{2} \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-y}}} dy = \cancel{-}\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

8. Komplexe Zahlen:

Motivation: Um alle quadratischen Gleichungen lösen zu können, muss man die reellen auf die komplexen Zahlen erweitern.

8.1 Definition:

Ausgangspunkt: Manche quadratischen Gleichungen haben keine reelle Lsg

Beispiel: $x^2 - 4x + 13 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\sqrt{-1}$$

Diese Lösungen sind keine reellen Zahlen, sie werden aber als gewisse mathematische Objekte akzeptiert.

Definition: imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$, d.h. $i^2 = -1$

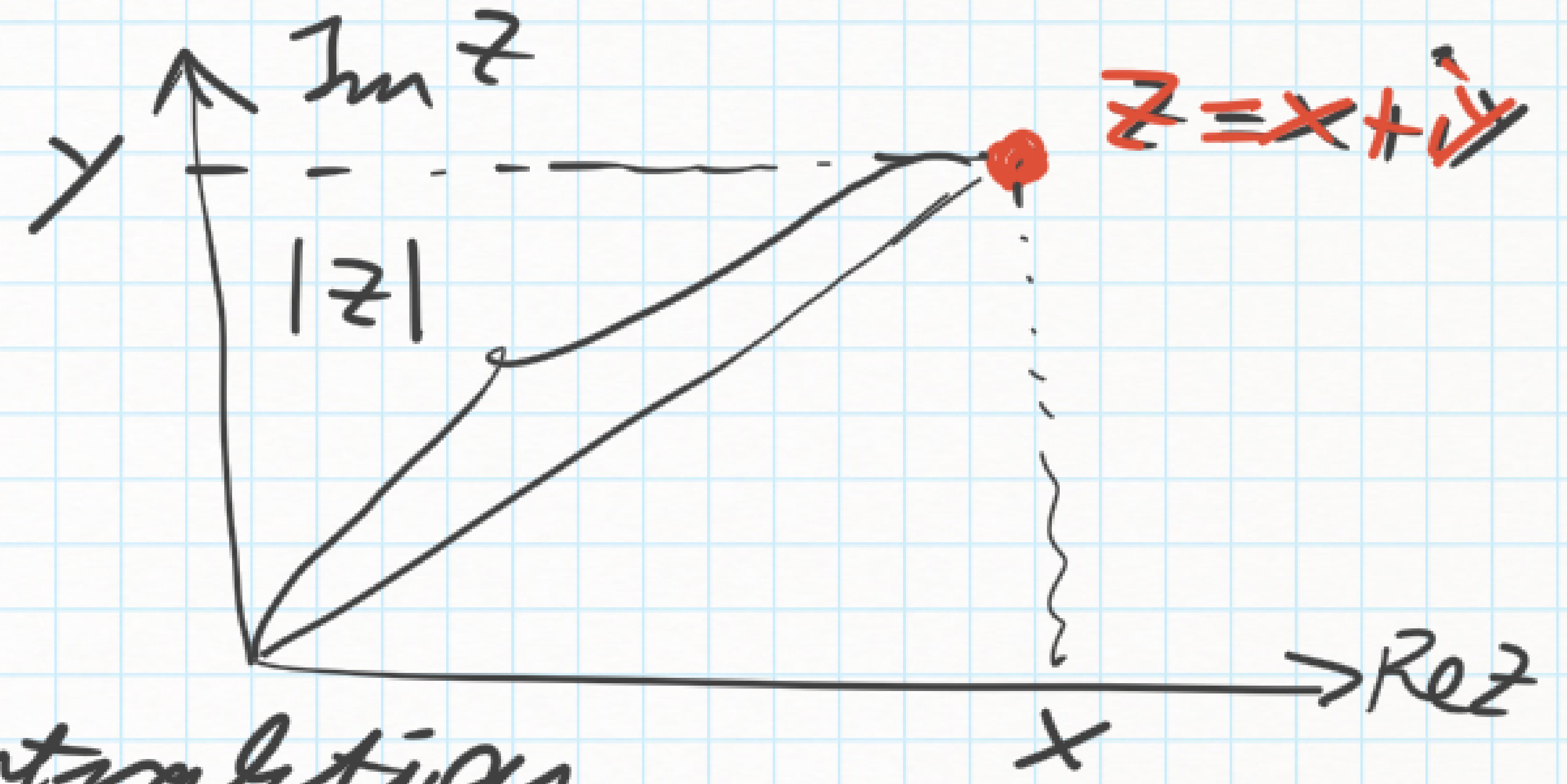
Menge aller komplexen Zahlen $\mathbb{C}$: $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$

Realteil: $x = \mathrm{Re}(z)$, Imaginärteil: $y = \mathrm{Im}(z)$

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sie in Real- und in Imaginärteil übereinstimmen: $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$

Eine komplexe Gleichung umfasst damit zwei reelle Gleichungen.

Graphische Darstellung einer komplexen Zahl $z = x + iy$ als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene



Pythagoras: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Beispiel: $z = 2 + i$, $|z| = \sqrt{5}$

8.2 Rechnen mit komplexen Zahlen:

Anwendung der Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf komplexe Zahlen

8.2.1 Addition und Subtraktion:

Assoziativgesetz

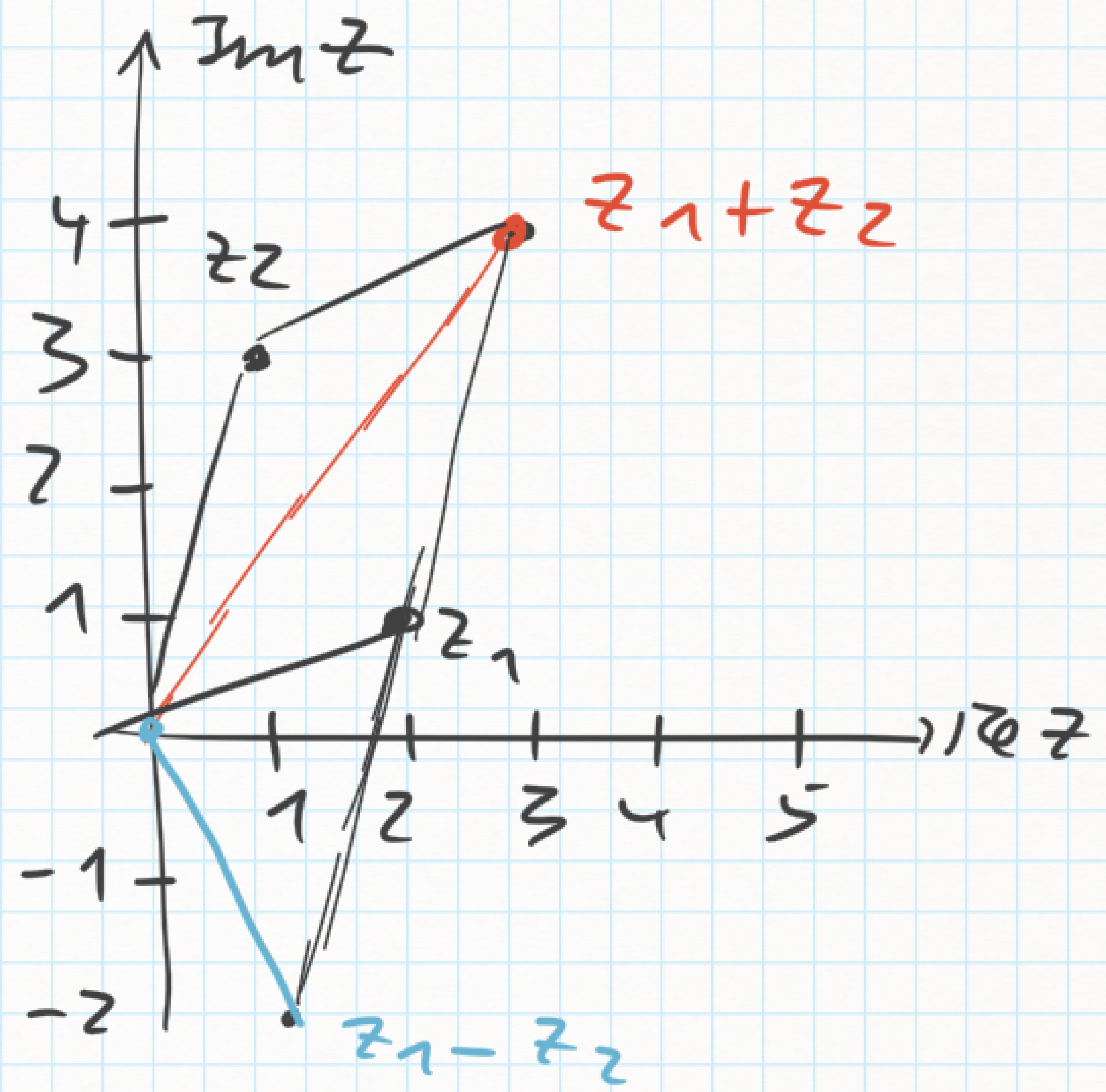
$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Beispiel: $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 3i$

$z_1 + z_2 = 3 + 4i$, $z_1 - z_2 = 1 - 2i$



Graphische Veranschaulichung: Addition und Subtraktion in Gaußscher Zahlenebene erfolgt komponentenweise wie bei Vektoren

8.2.2 Multiplikation:

$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$: Distributivgesetz und $i^2 = -1$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + \underbrace{i^2}_{=-1} y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Beispiel: $z_1 \cdot z_2 = (2+i)(1+3i) = 2 + i + 6i + 3\underbrace{i^2}_{=-1} = -1 + 7i$

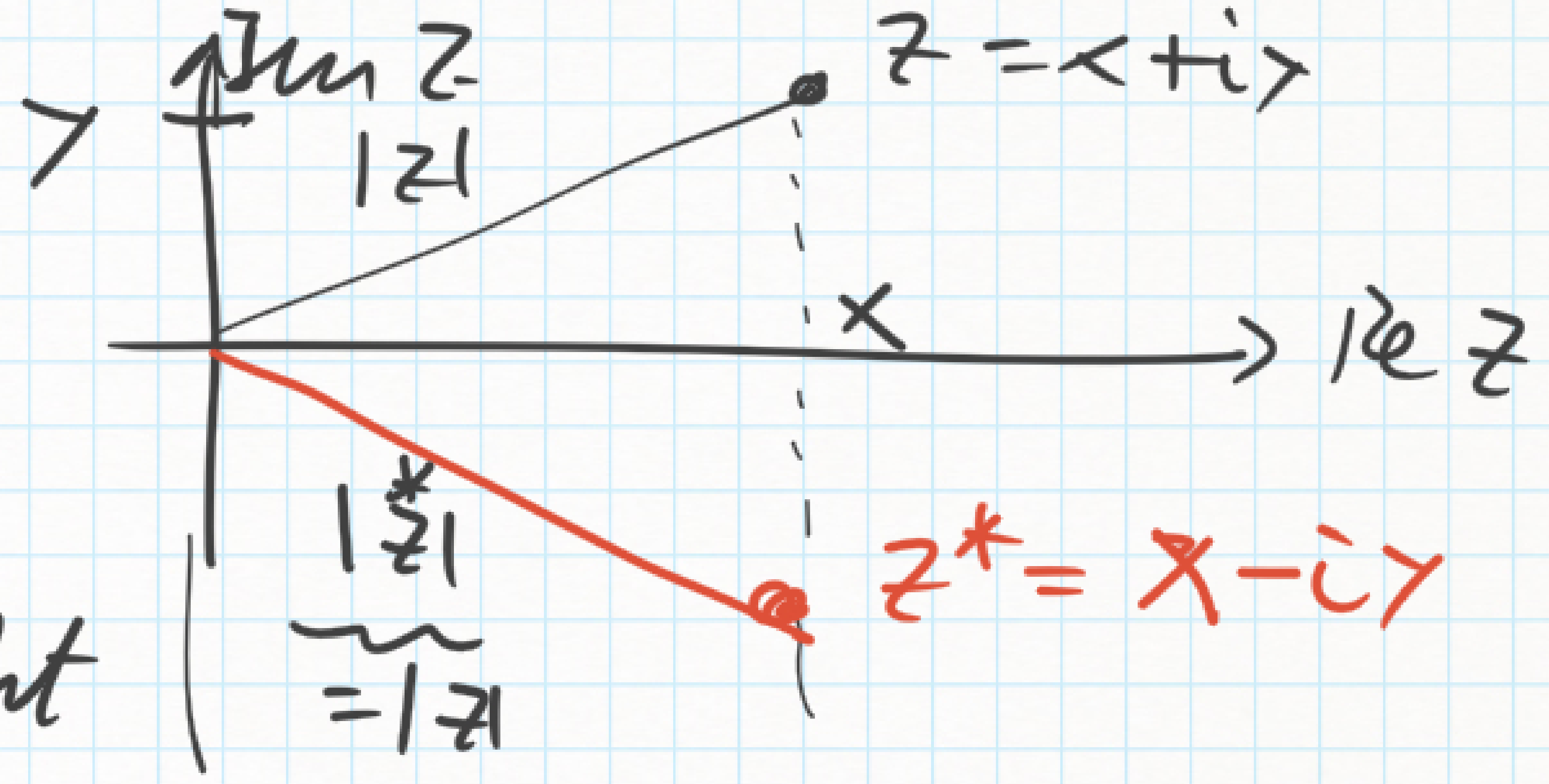
$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

$$= x_1^2x_2^2 - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + x_2^2y_1^2$$

$$= x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) = (x_1^2 + y_1^2)\cdot(x_2^2 + y_2^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{5}\cdot\sqrt{10} = 5\sqrt{2} = \sqrt{1+49} \ ✓$$

8.2.3 Konjugiert komplexe Zahl:



Zu jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ lässt sich eine konjugiert komplexe Zahl

$$z^* = x - iy$$

einführen. In der Gaußschen Zahlenebene entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse.

Bemerkungen:

a) $z = x + iy$
$z^* = x - iy$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{2}(z + z^*)$
$y = \frac{1}{2i}(z - z^*) = \frac{i}{2}(z^* - z)$

Achtung: $\frac{1}{i} = ?$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

b) $z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 - \underbrace{i^2}_{=-1} y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^*|^2$

c) Eine doppelte Konjugation ändert nichts:
$(z^*)^* = [(x+iy)^*]^* = [x - iy]^* = x + iy = z$

8.2.4 Division:

Quotienten zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \underbrace{\frac{1}{|z_2|^2}}_{\text{reell}} z_1 \cdot z_2^*$

Division komplexer Zahlen wird dadurch auf Multiplikation komplexer Zahlen zurückgeführt

Beispiel:
$\frac{2+i}{1+3i} = \frac{2+i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{1}{10}(2 + i - 6i - 3\underbrace{i^2}_{=-1}) = \frac{1}{10}(5 - 5i) = \frac{1}{2}(1-i)$

Betrag: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 z_2^*| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| |z_2^*| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

8.2.5 Folgerungen:

Bei der komplexen Konjugation zusammengesetzter Ausdrücke ist jede einzelne komplexe Zahl durch ihre konjugiert komplexe Zahl zu ersetzen

a) $(z_1+z_2)^* = [(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]^* = (x_1+x_2)-i(y_1+y_2) = z_1^* + z_2^*$

b) $z_1^* = [(z_1-z_2)+z_2]^* \overset{a)}{=} (z_1-z_2)^* + z_2^* \Rightarrow (z_1-z_2)^* = z_1^* - z_2^*$

c) $(z_1 \cdot z_2)^* = [(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)]^*$

$= [x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = z_1^* \cdot z_2^*$

d) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \left(\frac{1}{|z_2|^2} z_1 z_2^*\right)^* \overset{c)}{=} \frac{1}{|z_2|^2} z_1^* \underbrace{(z_2^*)^*}_{= z_2} = \frac{1}{|z_2^*|^2} z_1^* z_2 = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

8.2.6 Bemerkung:

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden im Sinne der Axiome vom Abschnitt 1.2 bezüglich der Addition und der Multiplikation einen Körper.

8.3 Euler-Formel:

Die Euler-Formel stellt eine Verbindung zwischen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen im Rahmen der komplexen Zahlen dar.

8.3.1 Herleitung mit Taylor-Reihe:

$$e^x \underset{\overline{\overline{3.4,\,6.3}}}{\overset{\text{Abschnitt}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$$

$$i^{2k+1} = i^{2k} \cdot i = (-1)^k \cdot i$$

$$i^2 = -1$$

Analytische Fortsetzung:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}}_{\text{geraden Terme}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{ungerade Terme}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1}$$

$$\underset{\overline{\overline{3.4}}}{\overset{\text{Abschnitt}}{=}} \cos x + i \sin x$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Euler Formel: } e^{ix} = \cos x + i \sin x}$