Wiederholung:

Komplexe Zahlen: $z = x + y \cdot i$; $x, y \in \mathbb{R}$; imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Taylor-Reihen von Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen:

Euler-Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$; $x \in \mathbb{R}$

8.3.2 Additionstheoreme:

Potenzgesetz: $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$

Verwendung der Euler-Formel:

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + \underbrace{i^2}_{=-1}\sin\alpha\sin\beta$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Gleichheit zweier komplexer Zahlen = Gleichheit der jeweiligen Real- und Imaginärteile

Realteil: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

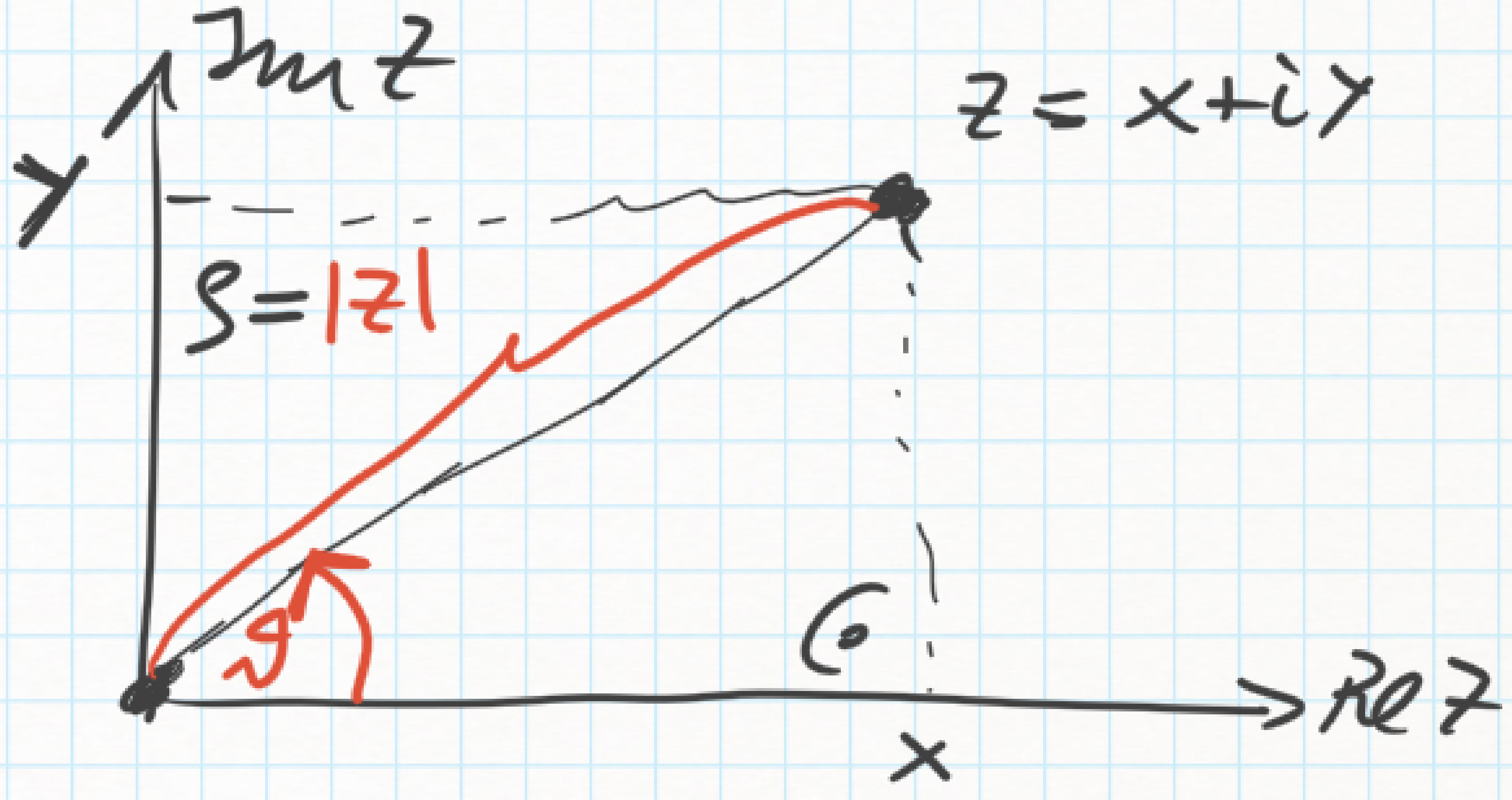
Imaginärteil: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow$ trigonometrische Additionstheoreme

8.4 Polarkoordinatendarstellung:

- Komplexe Zahlen werden in Gaußscher Zahlenebene dargestellt.
- Bisher wurden kartesische Koordinaten verwendet.
- Jetzt: Polarkoordinaten, also Abstand vom Ursprung und Winkel zur Achse
  $\Rightarrow$ Euler-Formel von grundlegender Bedeutung

8.4.1 Argument und Phasenfaktor:



- Betrag einer komplexen Zahl = Abstand der Zahl vom Ursprung: $\varrho = |z|$
- Winkel zur x-Achse = Argument der komplexen Zahl

$$\vartheta = \arg(z)$$

Sind Real- und Imaginärteil bekannt, dann lassen sich die Polarkoordinaten berechnen

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\vartheta = \frac{y}{x} \Rightarrow \vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Umgekehrt lassen sich die kartesischen Koordinaten aus den Polarkoordinaten berechnen:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\varrho} \Rightarrow x = \varrho\cos\vartheta \quad ; \quad \sin\vartheta = \frac{y}{\varrho} \Rightarrow y = \varrho\sin\vartheta$$

Euler-Formel

Anwendung auf komplexe Zahlen: $z = x+iy = \varrho\cos\vartheta + i\varrho\sin\vartheta = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \varrho\cdot e^{i\vartheta}$

Bemerkung 1:

$|e^{i\vartheta}| = |\cos\vartheta + i\sin\vartheta| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = 1$ (trigonometrischer Pythagoras)

$\Rightarrow$ der Phasenfaktor $e^{i\vartheta}$ liegt in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Einheitskreis um den Ursprung.

Bemerkung 2: Konjugiert komplexe Zahl

$$z = \varrho e^{i\vartheta} \quad \Rightarrow \quad z^* = (\varrho e^{i\vartheta})^* = \varrho e^{-i\vartheta} \overset{\text{Euler}}{=} \varrho(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$$

8.4.2 Multiplikation und Division:

$$z_1 = \varrho_1 e^{i\vartheta_1}, \quad z_2 = \varrho_2 e^{i\vartheta_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \varrho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \varrho_2 e^{i\vartheta_2} = \underbrace{\varrho_1 \cdot \varrho_2}_{\text{Multiplikation der Beträge}} \cdot e^{i\overbrace{(\vartheta_1 + \vartheta_2)}^{\text{Addition der Argumente}}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 z_2^* = \frac{1}{\varrho_2^2} \varrho_1 e^{i\vartheta_1} \varrho_2 e^{-i\vartheta_2} = \underbrace{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}_{\text{Division der Beträge}} \cdot e^{i\underbrace{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}_{\text{Subtraktion der Argumente}}}$$

8.4.3 Folgerungen:

a) Spezialisierung auf $z_1 = z_2 = e^{i\vartheta}$: $\quad e^{i\vartheta} \cdot e^{i\vartheta} = e^{2i\vartheta}$

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2 = \cos^2\vartheta + i2\sin\vartheta\cos\vartheta + \underbrace{i^2}_{=-1}\sin^2\vartheta = \cos(2\vartheta) + i\sin(2\vartheta)$$

$$\cos(2\vartheta) = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta, \quad \sin(2\vartheta) = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

b) Iteration: $e^{i\vartheta}\cdot e^{2i\vartheta} = e^{3i\vartheta}$

Euler-Formel, Zerlegung in Real- und Imaginärteil, a): Moivre-Formel

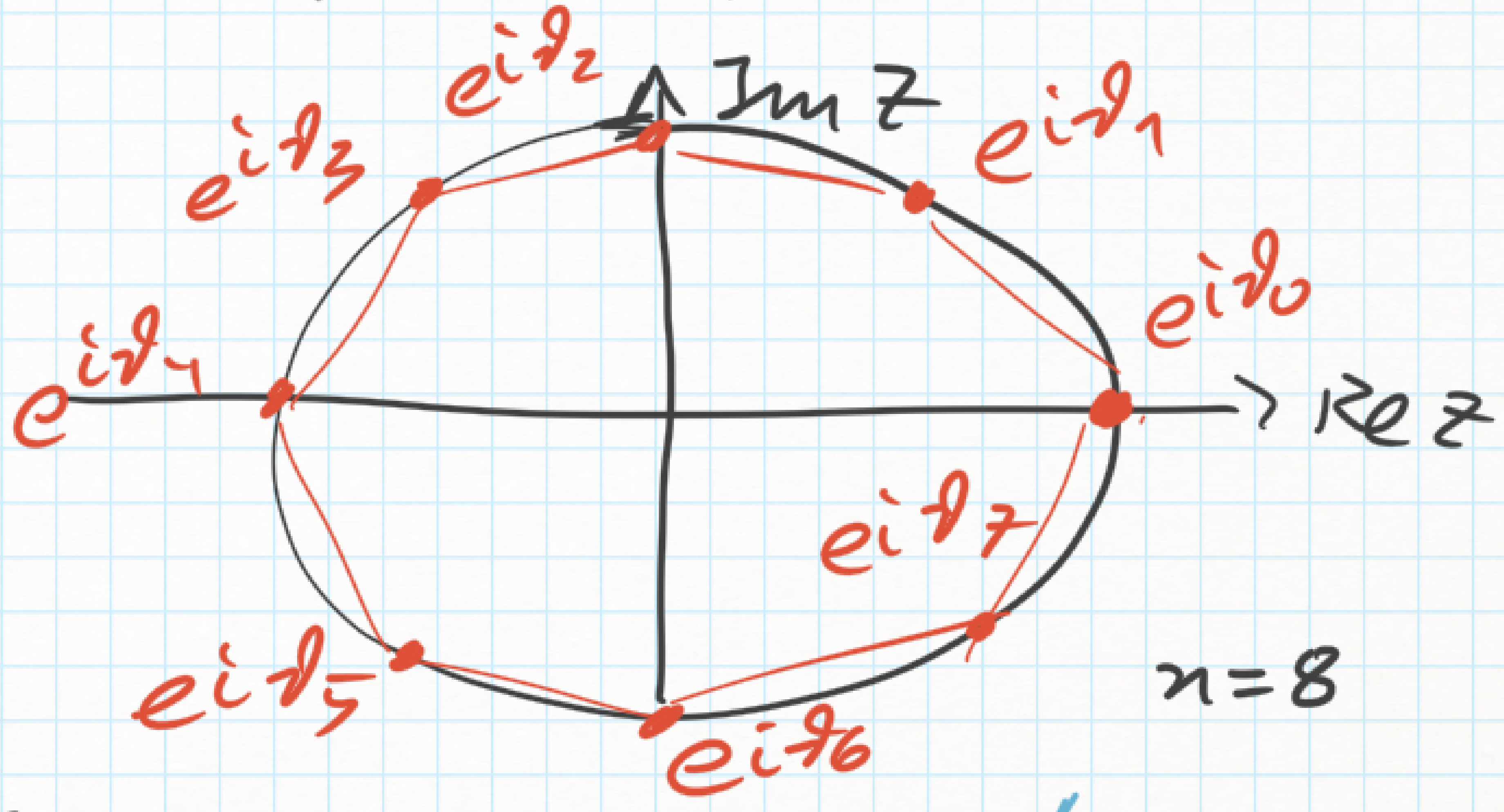
$\cos(3\vartheta) = \cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\sin^2\vartheta$, $\quad \sin(3\vartheta) = 3\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \sin^3\vartheta$

c) Weitere Iterationen: $(e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta}$; $n\in\mathbb{N}$

$\vartheta_k = \frac{2\pi}{n}k$; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$\underline{(e^{i\vartheta_k})^n} = e^{in\vartheta_k} = e^{i\cancel{n}\frac{2\pi}{\cancel{n}}k} = e^{i2\pi k} \underline{= 1}$

=> Alle $e^{i\vartheta_k}$ stellen n-te Wurzel von 1 dar

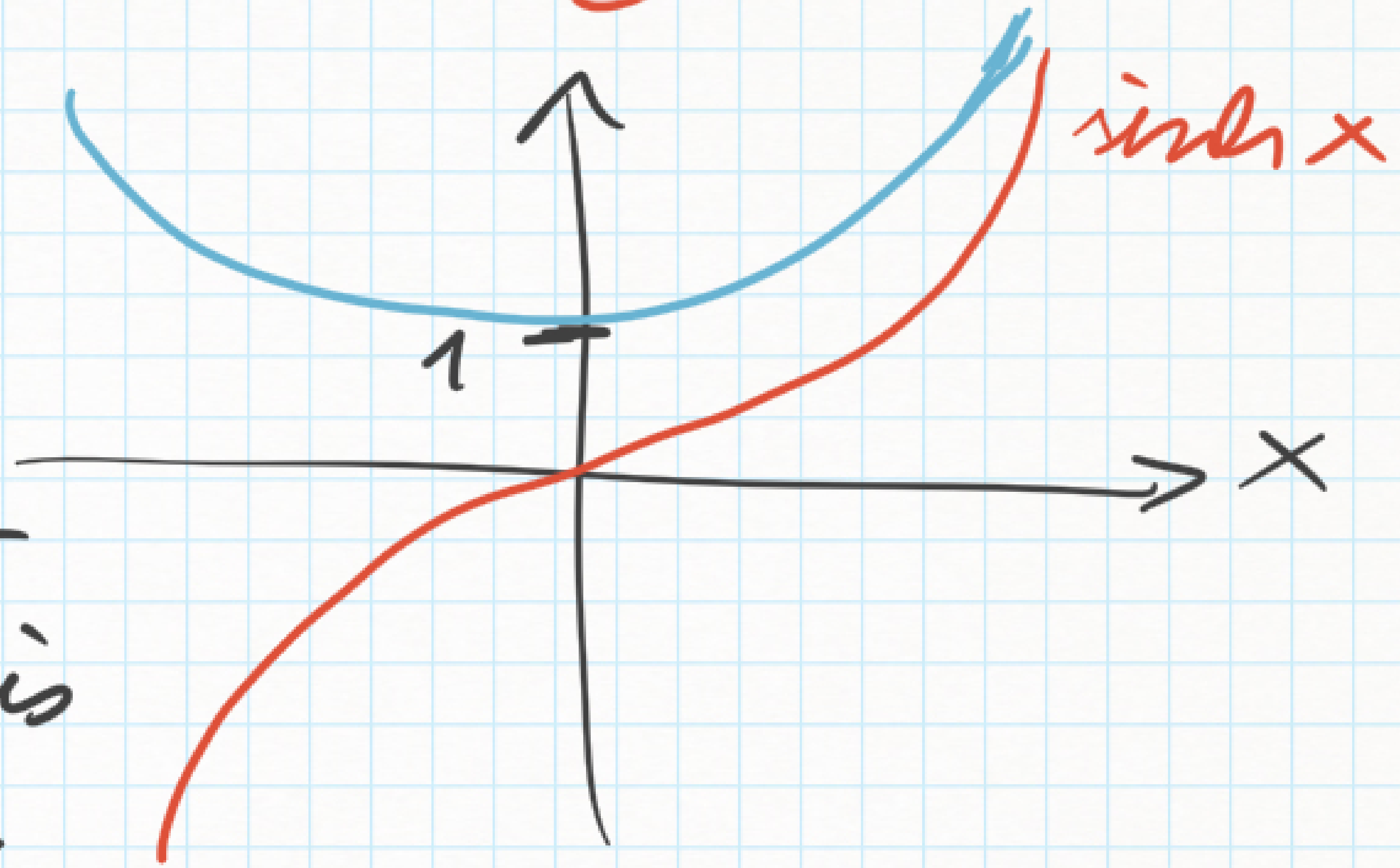


8.5 Hyperbelfunktionen:

Hyperbelfunktionen haben folgende Definition:

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ Sinushyperbolicus

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ Kosinushyperbolicus



Sie besitzen ähnliche Eigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen: Auflistung, aber ohne Beweis

a) Symmetrie: $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$

b) Taylor-Reihen:

$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$

$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$

$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = -i$

c) Hyperbolischer Pythagoras: $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$

d) Additionstheoreme:

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

e) Differentiation: $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$

f) Integration: $\int^x \sinh(y)\,dy = \cosh x + C$, $\int^x \cosh(y)\,dy = \sinh x + C$

Woher kommt die Ähnlichkeit zwischen Hyperbelfunktionen und trigonometrischen Funktion?

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$\Rightarrow$

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \Rightarrow \cos(ix) = \frac{1}{2}(e^{i^2x} + e^{-i^2x}) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \cosh(x)$

$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \Rightarrow \sin(ix) = \frac{1}{2i}(e^{i^2x} - e^{-i^2x})$

$= \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x}) = \frac{i}{2}(-1)^2(e^{x} - e^{-x})$

$= \frac{i}{2}(e^{x} - e^{-x}) = i \sinh(x)$

Analytische Fortsetzung: $x \to ix$

Analog:

$\cosh(ix) = \cos x$, $\sinh(ix) = i \sin x$

3.6 Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom $n$ten Grades

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

mit komplexen Koeffizienten, d.h. $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, besitzt auch genau n komplexe Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$ mit der Eigenschaft $P_n(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdot\dots\cdot(z-z_n)$

Hierbei können Nullstellen mehrfach vorkommen und werden dann entsprechend der Vielfachheit gezählt.

Beispiel: $x^2 - 4x + 13 = 0 \Rightarrow x_\pm = 2 \pm 3\sqrt{-1} = 2 \pm 3i$

Probe: $(x - x_+)(x - x_-) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = (x-2)^2 - 9 \underbrace{i^2}_{=-1}$

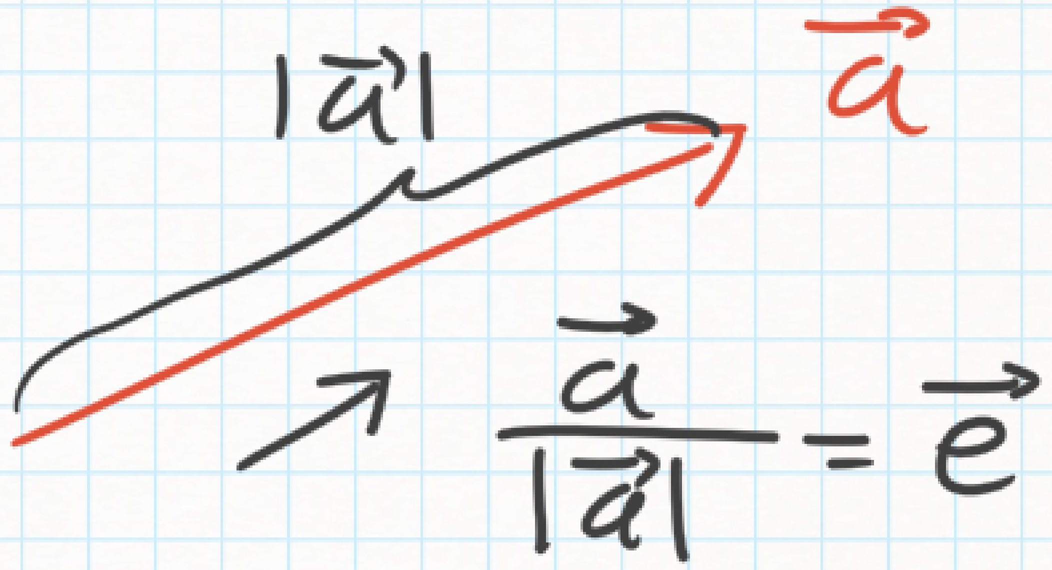
$= x^2 - 4x + 4 + 9 = x^2 - 4x + 13$

9. Vektorrechnung:

Motivation:

- In der Physik treten häufig Größen auf, die eine Richtung haben.
- Beispiel: Ort oder Geschwindigkeit eines Teilchens, die Kraft, die auf das Teilchen einwirkt

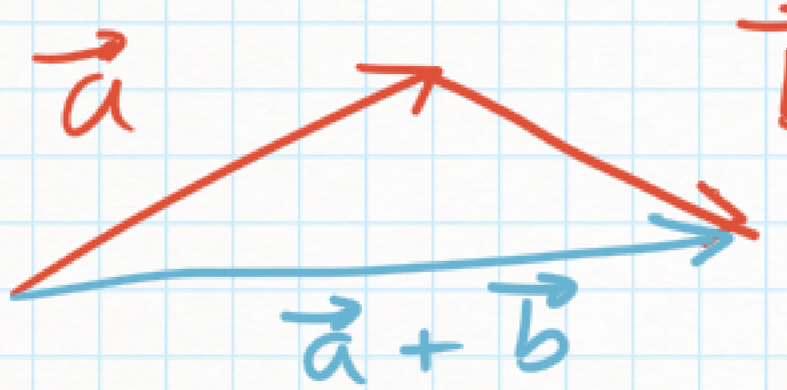
9.1 Rechenregeln mit Vektoren:



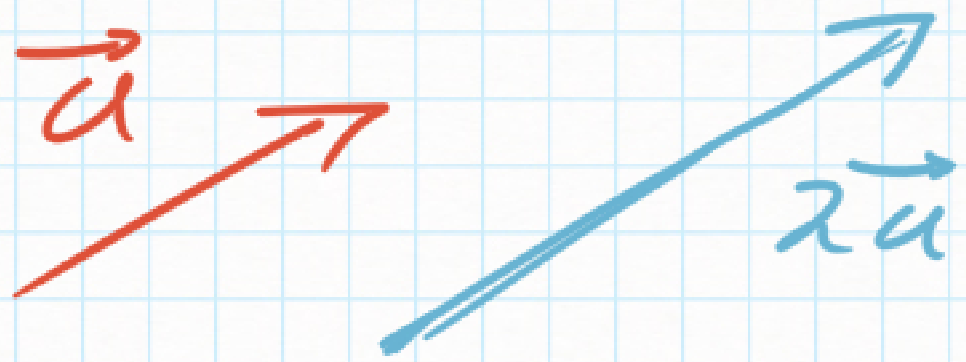
Vektor $\vec a$ = gerichtete Größe, die durch ein Pfeil definiert wird

1) Betrag von $|\vec a|$ = Länge des Pfeils
2) Richtung: $\frac{\vec a}{|\vec a|} = \vec e$

Addition von Vektoren:



Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl:



Rechenregeln für diese beiden Operationen:

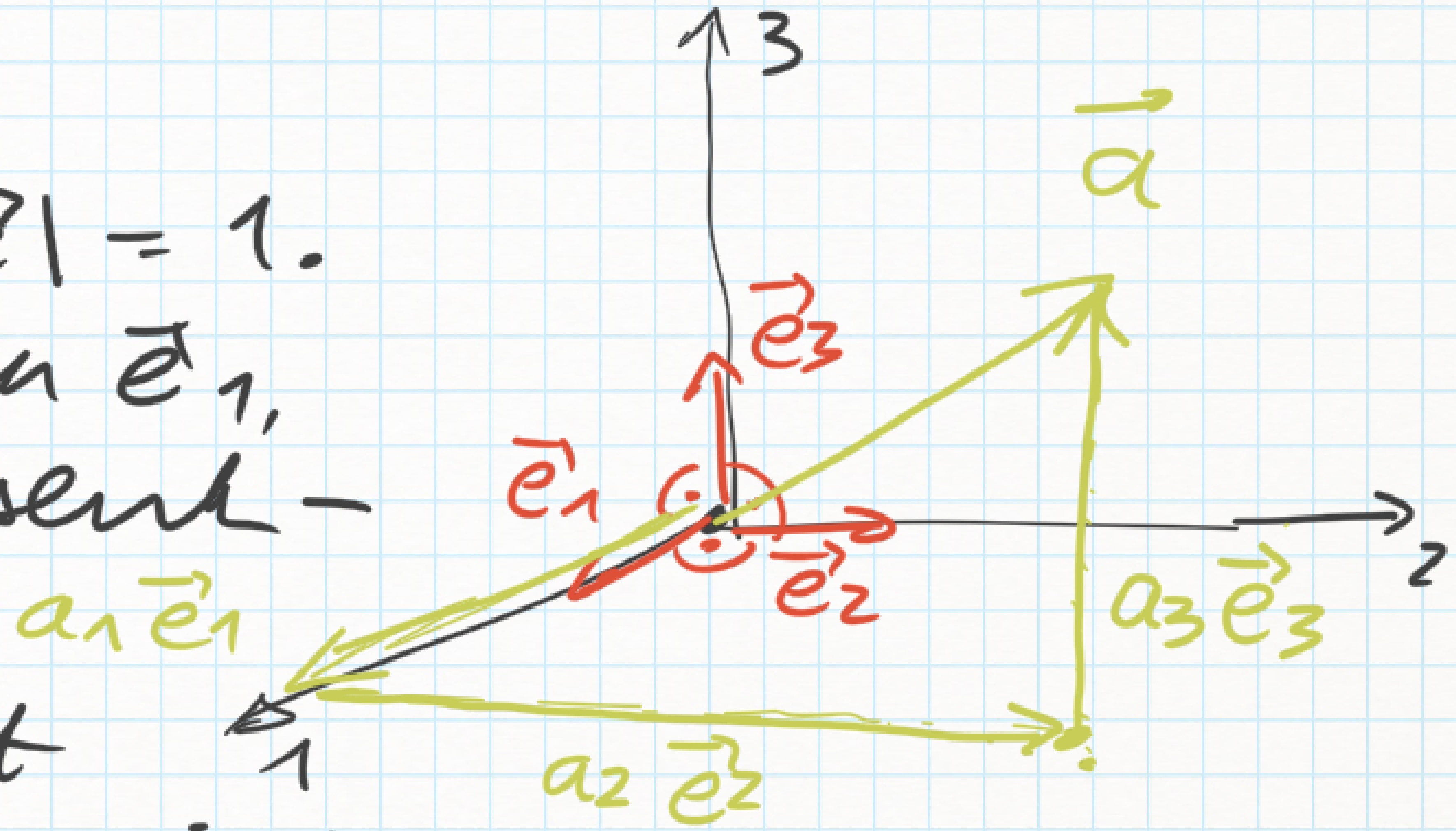
a) Kommutativität: $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$, $\lambda \vec a = \vec a \lambda$

b) Assoziativität: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$

c) Distributivgesetze:

$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

9.2 Komponentendarstellung von Vektoren:



Zu $\vec{a}$ gibt es einen Einheitsvektor $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ mit $|\vec{e}| = 1$.

Ein Koordinatensystem wird durch Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ definiert, die jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen und ein Rechtssystem bilden.

Projektion von $\vec{a}$ auf diese Einheitsvektoren führt zu Vektoren $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$, $a_3\vec{e}_3$, deren Addition wieder $\vec{a}$ ergibt:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Abkürzende Notation: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; a_1, a_2, a_3 Projektionslängen

Beispiel: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Betrag des Vektors: Pythagoras

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

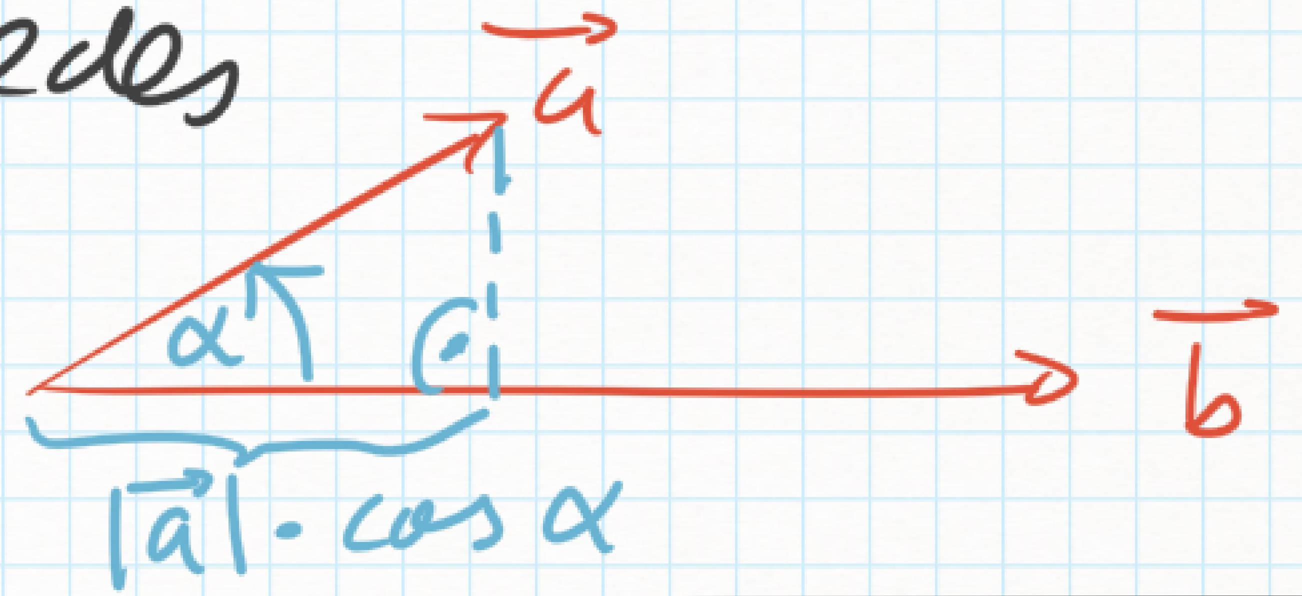
Addition zweier Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl sind komponentenweise definiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

9.3 Skalarprodukt zweier Vektoren:

Einem Paar von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes ein Skalar zuordnen

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \underbrace{\alpha}_{= \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})}$$



Axiome des Skalarproduktes:

a) Kommutativität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

b) Distributivgesetz:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

1) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Beispiel: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Einheitsvektoren $\vec{e}_i, \vec{e}_j$:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & ; i=j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker-Symbol})$$

Komponentendarstellungen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \quad , \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{= \delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \cancel{\sum_{j=1}^{3}} a_i b_{\cancel{j}\,i} \cancel{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ lässt sich durch die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen.