Ergebnis:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (*)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ läßt sich mit deren Komponenten berechnen. Konsequenzen:

1) $\vec{a} \cdot \vec{e}_i \overset{(*)}{=} a_i$: Projektion auf i-te Achse entspricht Skalarprodukt mit $\vec{e}_i$

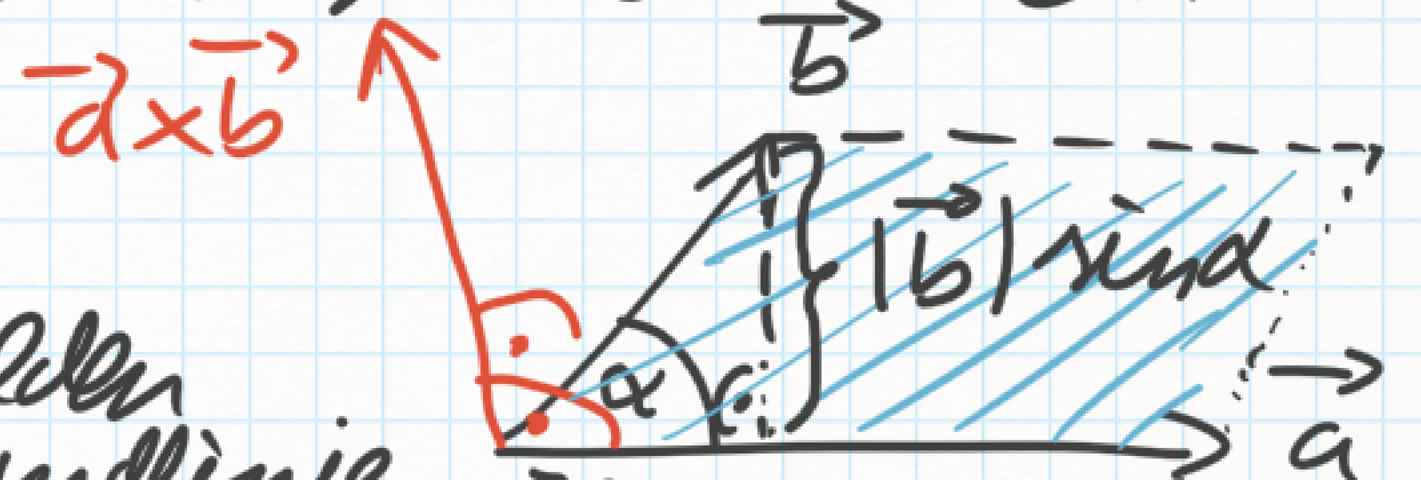
2) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \overset{(*)}{=} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (räumlicher Pythagoras)
   siehe gestern

3) Berechnung des Winkel $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Hilfe deren Komponenten

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \overset{(*)}{=} \arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

9.4 Vektorprodukt zweier Vektoren:

Einem Paar von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird über das Vektorprodukt ein Vektor zugeordnet: $\vec{a} \times \vec{b}$



1) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf dem von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm so, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden

2) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Fläche des Parallelogramms $= |\vec{a}|\;|\vec{b}| \sin \alpha$ = Grundlinie · Höhe

Axiome des Vektorprodukts:

a) Antikommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$

b) Distributivität: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

Vektorprodukt zweier Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$:

1) $i = j$: Antikommutativität führt auf Nullvektor

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$

2) $i \neq j$: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ ergibt Vektor vom Betrag 1, ferner steht $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ senkrecht auf $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$ so, dass $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$, $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ ein Rechtssystem bilden

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ Antikommutativität

$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ mit Hilfe der Komponenten von $\vec{a}$, $\vec{b}$ ausdrücken

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{= \vec{0}} + a_2 b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{= -\vec{e}_3} + a_3 b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{= \vec{e}_2}$$

$$+ a_1 b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{= \vec{e}_3} + a_2 b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{= \vec{0}} + a_3 b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{= -\vec{e}_1}$$

$$+ a_1 b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{= -\vec{e}_2} + a_2 b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{= \vec{e}_1} + a_3 b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{= \vec{0}}$$

$$= \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)$$
$$+ \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3)$$
$$+ \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$= \vec{a} \times \vec{b}$$

Kompakte Notation:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(\cancel{a_2 b_3} - \cancel{a_3 b_2}) + a_2(\cancel{a_3 b_1} - \cancel{a_1 b_3}) + a_3(\cancel{a_1 b_2} - \cancel{a_2 b_1}) = 0$$

Analog: $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) \stackrel{\uparrow}{=} 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

Kombination von Vektor- und Skalarprodukt:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$
$$+ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \text{Ihre Aufgabe} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}_{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\alpha} = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \underbrace{(1 - \cos^2\alpha)}_{= \sin^2\alpha \text{ (trig. Pyth.)}}$$

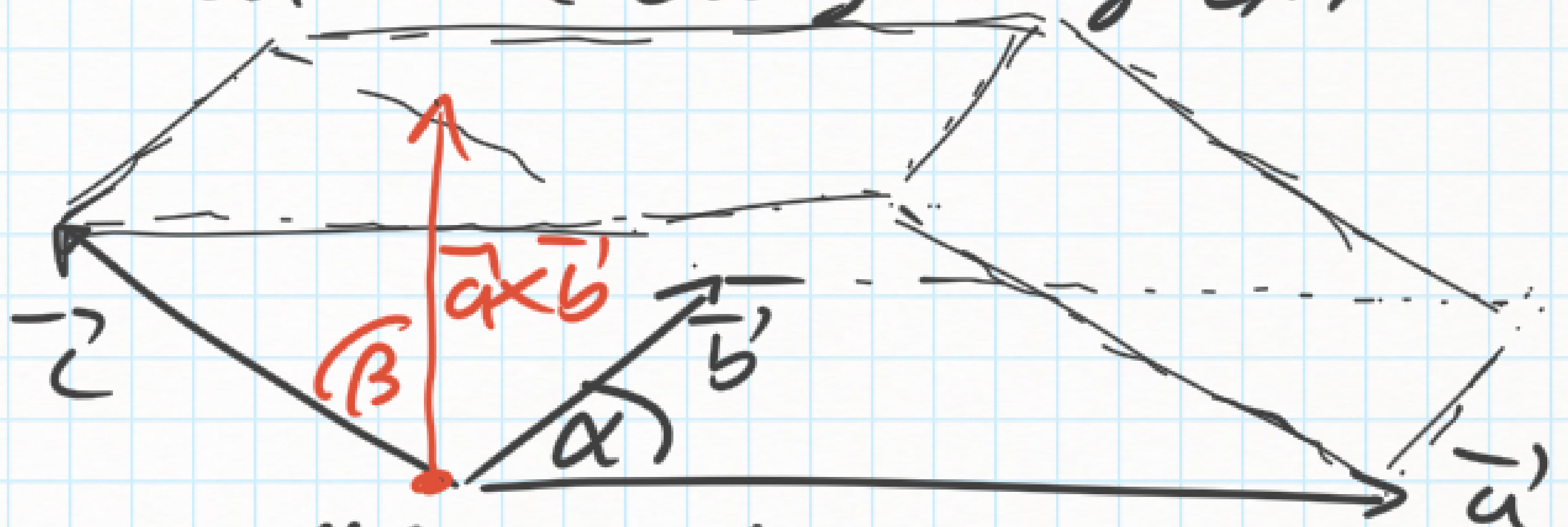
$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\alpha$$

9.5 Spatprodukt dreier Vektoren:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ spannen Parallelepiped auf:

Volumen: $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$

$$= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos\beta = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\alpha |\vec{c}| \cos\beta$$



Parallelepiped

Zusammenfassung:

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \underbrace{|\vec{a}\times\vec{b}|}_{=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\alpha} \cdot |\vec{c}|\cdot\cos\beta = \text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}$$

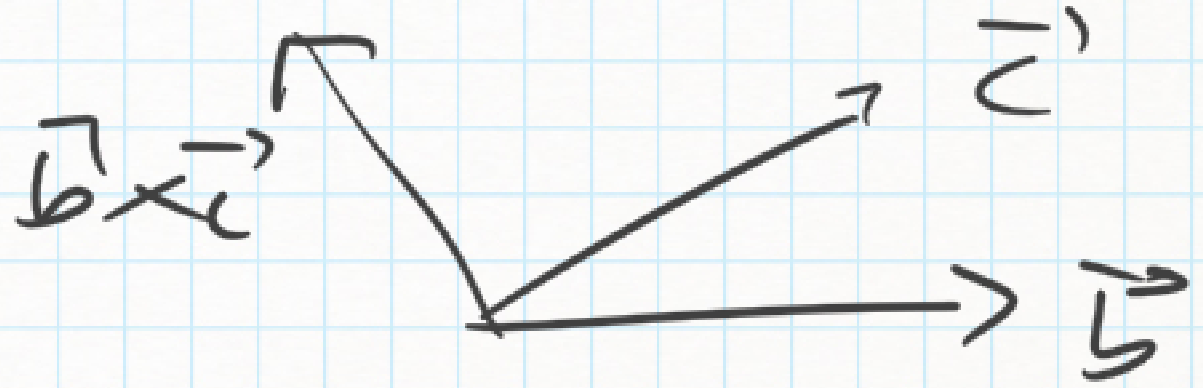
$$= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Symmetrie: $V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = V(\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = V(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bilden Rechtssystem

$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) < 0$: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bilden Linkssystem



9.6 Zweifaches Vektorprodukt: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

1) steht senkrecht auf $\vec{a}$, 2) steht senkrecht auf $\vec{b}\times\vec{c}$

Ad 2) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ liegt in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c}\ ; \quad \beta,\gamma: \text{zu bestimmen}$$

Ad 1) $\vec{a}\cdot[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})] = 0 \Rightarrow \beta\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \gamma\,\vec{a}\,\vec{c} = 0 \Rightarrow \beta = \alpha(\vec{a}\,\vec{c}),\ \gamma = -\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Zwischenergebnis: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha\{\vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\}$; α noch zu bestimmen

Festlegung von α:

Komponentenzerlegung

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \begin{pmatrix} b_1(\cancel{a_1c_1} + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(\cancel{a_1b_1} + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_3c_3 + a_1c_1) - c_2(a_3b_3 + a_1b_1) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \boxed{\underbrace{\alpha}_{=1}} \underbrace{\{\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\}}_{\text{"bac - cab"-Regel}}$$

10 Matrizen:

Motivation:

Viele Anwendungen in der Physik:

- Beschreibung von Koordinatentransformation wie z.B. einer Rotation
- Lineare Gleichungssysteme lassen sich mit Matrizen kompakt formulieren und effizient lösen

10.1 Definition:

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ ist ein rechteckiges Schema $A = (a_{ij})$ mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sowie $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i: Zeile $\Rightarrow m$ Zeilen

j: Spalte $\Rightarrow n$ Spalten

Beispiel: 2×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Menge aller $m \times n$-Matrizen in $\mathbb{R}$: $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$

Wenn $m = n$ vorliegt, wird die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen mit $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ bezeichnet.

Beispiel: 2×2-Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Ist $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, dann bezeichnet $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ den i-ten Zeilenvektor von A und entsprechend $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ den j-ten Spaltenvektor.

$A^T = (a^T_{ij})$ mit $a^T_{ij} = a_{ji}$
wird als transponierte Matrix bezeichnet:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeilen und Spalten sind gegenüber A vertauscht

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})^T = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}^T = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$$

10.2 Addition und Subtraktion von Matrizen:

Es seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$. Addition und Subtraktion werden komponentenweise definiert

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Addition:

a) Kommutativität: $A + B = B + A$

b) Assoziativität: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) Linearität der Transposition: $(A + B)^T = A^T + B^T$

10.3 Multiplikation mit Skalar:

Auch Multiplikation von $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$ ist komponentenweise definiert

$$kA = \begin{pmatrix} k a_{11} & k a_{12} & \cdots & k a_{1n} \\ k a_{21} & k a_{22} & \cdots & k a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k a_{m1} & k a_{m2} & \cdots & k a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$2\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln: a) Assoziativität: $k(lA) = (kl)A$

b) Distributivität: $k(A+B) = kA + kB$, $(k+l)A = kA + lA$

10.4 Multiplikation zweier Matrizen:

Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times p, \mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}(p \times n, \mathbb{R})$ zwei Matrizen. Wichtig ist dabei, dass die Spaltenanzahl von A mit der Zeilenanzahl von B übereinstimmt. Dann ist das Produkt $C = A \cdot B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ durch die Komponenten

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

definiert = Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B.

Beispiel: $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$, $C = A \cdot B \in \mathrm{Mat}(4 \times 2, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 + (-2)\cdot 2 + 0\cdot 5 & 5\cdot 7 + (-2)(-1) + 0\cdot 3 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 7 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 + 5\cdot 2 + 1\cdot 5 & 2\cdot 7 + 5\cdot(-1) + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 2 + 0\cdot 5 & 0\cdot 7 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 37 \\ 19 & 10 \\ 21 & 12 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

a) Das Produkt $B \cdot A$ ist im Beispiel nicht definiert, da die Zahl der Spalten von B, also 2, nicht mit der Zahl der Zeilen von A, also vier, übereinstimmt.

b) Im Allgemeinen ist das Produkt von Matrizen nicht kommutativ

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

c) Es ist $A \cdot B = 0$ auch mit $A, B \neq 0$ möglich.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Mit der Matrizen-Multiplikation lässt sich das Skalarprodukt definieren:

$$\underset{\text{Skalarprodukt}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \underbrace{\vec{a}^T}_{\substack{\text{Zeilenvektor} \\ \in Mat(1 \times n, \mathbb{R})}} \cdot \underbrace{\vec{b}}_{\substack{\text{Spaltenvektor} \\ \in Mat(n \times 1, \mathbb{R})}} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \to \text{Zahl} \in Mat(1 \times 1, \mathbb{R})$$

Matrizen-Multiplikation

Rechenregeln für Matrizen-Multiplikation:

a) Assoziativität: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, $(kA) \cdot B = A(kB) = k(A \cdot B)$

b) Distributivität: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

c) Transposition:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Beweis in Komponentenschreibweise:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)^T = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} \cdot b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{p} b^T_{ik} a^T_{kj}$$

Zeilen und Spalten werden vertauscht
$\hat{=}$ Transposition

10.5 Koordinatentransformation:

siehe Vorlesungsmanuskript