10.6 Inverse Matrizen:

Für Matrizen ist eine Division nicht erklärt. Die Gleichung $A \cdot X = B$ lässt sich nicht so ohne weiteres nach X auflösen. Für eine Teilmenge quadratischer Matrizen kann man aber inverse Matrizen bezüglich der Matrizenmultiplikation finden. Es sei $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Dann heißt $A^{-1} \in Mat(n, \mathbb{R})$ die zu A inverse Matrix, falls gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Beispiel: $A, A^{-1} \in Mat(2, \mathbb{R})$

$$A \cdot A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}_{=A^{-1}} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Für allgemeine Matrizen $A, A^{-1} \in Mat(2, \mathbb{R})$:

$$A \cdot A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}_{=A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Falls A eine Inverse A^{-1} besitzt, dann ist diese eindeutig. Beweis: Gäbe es zwei inverse Matrizen A^{-1} und A_{-1} zwei Inverse von A, dann gilt: $A^{-1}A = AA^{-1} = E = A_{-1}A = AA_{-1}$

$A_{-1} = A_{-1} \cdot E = A_{-1} \cdot (A \cdot A^{-1}) = (A_{-1} \cdot A) \cdot A^{-1} = E A^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A_{-1} = A^{-1}$

Rechenregeln:

a) Das doppelt Inverse einer Matrix entspricht der Identität: $(A^{-1})^{-1} = A$

b) Transposition und Invertierung einer Matrix kommutieren: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

c) Für die Invertierung einer Matrix A mit einer reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$(c\,A)^{-1} = \frac{1}{c}\,A^{-1}$$

d) Das Inverse eines Produktes von Matrizen ist das Produkt der inversen Matrizen mit umgekehrter Reihenfolge: $\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

Beweis: $\underline{B^{-1}A^{-1}} = B^{-1}A^{-1} \cdot E = B^{-1}A^{-1}(AB)\cdot(AB)^{-1} = B^{-1}(A^{-1}A)B(AB)^{-1}$
$= B^{-1}EB(AB)^{-1} = (B^{-1}B)(AB)^{-1} = E(AB)^{-1} = \underline{(AB)^{-1}}$

11. Determinanten:

Motivation:

- Jeder quadratischen Matrix kann man mit der Determinante eine reelle Zahl zuordnen.
- Mit ihr kann überprüft werden, ob eine Matrix invertierbar ist.
- Falls eine Matrix existiert, dann kann man sie mit Determinanten ausrechnen.

11.1 Definition: Es sei $A \in Mat(n, \mathbb{R})$. Dann bezeichnet die Determinante die Abbildung

$$\det: Mat(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Beispiel: $n=2$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Beispiel: $n=3$, Determinante nach der Regel von Sarrus ("Jägerzaun"-Regel)

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot2\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot3\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 - 0\cdot1\cdot1 - 3\cdot1\cdot0 = 1+6-4 = 3$$

Anwendungen der Determinante einer 3×3-Matrix:

1) Vektorprodukt

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{\vec e_1\, a_2 b_3} + \underline{\vec e_2\, a_3 b_1} + \underline{\vec e_3\, a_1 b_2} - \underline{b_1 a_2\, \vec e_3} - \underline{\vec e_1\, b_2 a_3} - \underline{\vec e_2\, a_1 b_3}$$

$$= (a_2 b_3 - b_2 a_3)\vec e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec e_2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\vec e_3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{siehe Kapitel 4!}$$

2) Spatprodukt:

$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ => siehe Kapitel 9

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$$

11.2 Laplacescher Entwicklungssatz:

Im allgemeinen Fall einer $n \times n$-Matrix mit $n \geq 3$ wendet man den Laplaceschen Entwicklungssatz an. Es sei $A \in Mat(n, \mathbb{R})$. Dann bezeichnet $A_{ij} \in Mat(n-1, \mathbb{R})$ diejenige Untermatrix von A, die man durch Streichen (Weglassen) der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A erhält:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ - Matrix $\qquad (n-1) \times (n-1)$ Matrix

Dann besagt der Laplacesche Entwicklungssatz, dass man die Determinante von A mit Hilfe der Determinanten der Untermatrizen berechnen kann:

1) Zeilen-Entwicklung: Für jede Zeile i mit $1 \le i \le n$ gilt

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{i,n}$$

2) Spalten-Entwicklung: Für jede Spalte j mit $1 \le j \le n$ gilt

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{j+2} a_{2j} \det A_{2j} + \ldots + (-1)^{j+n} a_{nj} \det A_{nj}$$

Beispiel: obige 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Entwicklung nach 1. Zeile

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) + 2 \cdot (3-2) = 1 + 2 = 3 \checkmark$$

2) Entwicklung nach 2. Spalte

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-6) = 1 - 4 + 6 = 3 \checkmark$$

Bemerkungen:

1) Es ist sinnvoll, nach einer Zeile bzw. Spalte zu entwickeln, die möglichst viele Nullen enthält

2) Vorzeichenverteilung im Laplaceschen Entwicklungssatz entspricht einem Schachbrettmuster, wobei in der Hauptdiagonale nur Pluszeichen stehen.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix} \qquad n=5$$

11.3 Eigenschaften:

a) Diagonalmatrix: Determinante ist Produkt der Diagonalelemente

$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

b) Gemeinsamer Faktor λ in der i-ten Zeile:

$$\det\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

c) Gemeinsamer Faktor λ in der j-ten Spalte:

$$\det\begin{vmatrix} \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix}$$

d) Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante

e) Die Determinante ändert sich nicht, wenn man zur i-ten Zeile das λ-Fache der k-ten Zeile hinzuaddiert

$$\det\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & & a_{kn} \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

f) Die Determinante ändert sich nicht, wenn man zur j-ten Spalte das λ-Fache der l-ten Spalte hinzuaddiert:

$$\det\begin{pmatrix} \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1l} \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nl} \cdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cdots a_{1j}+\lambda a_{1l} & \cdots & a_{1l} \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots a_{nj}+\lambda a_{nl} & \cdots & a_{nl} \cdots \end{pmatrix}$$

g) Matrix und transponierte Matrix haben dieselbe Determinante: $\det A = \det A^T$

h) Aus $\det A = 0$ folgt, dass A nicht invertierbar ist, da dann die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von A linear abhängig sind.

Veranschaulichung beim Spatprodukt: Verschwindet das Volumen des Parallelepipeds, dann verschwindet auch die Determinante.

i) Produktsatz:

$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Anwendung: $A \cdot A^{-1} = E$

$\det(A \cdot A^{-1}) \overset{i)}{=} (\det A)(\det A^{-1}) = \det E \overset{a)}{=} 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Ist $\det A = 0$, so existiert A^{-1} nicht existiert, siehe h)

Beispiel: Obige Determinante mit Zeilenmanipulationen à la e)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{d)}{\overset{(I)\leftrightarrow(II)}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{e)}{\overset{(III)-\frac{1}{3}(I)}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} \underset{e)}{\overset{(III)-\frac{1}{3}(II)}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= -3 \cdot 1 \cdot (-1) = 3$ ✓

11.4 Inverse Matrix:

Ist $\det A \neq 0$, dann existiert die zu A inverse Matrix A^{-1}. Und A^{-1} läßt sich mit der Cramerschen Regel berechnen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\operatorname{adj} A}_{\text{Adjunkte von } A}, \quad (\operatorname{adj} A)_{\boxed{ij}} = (-1)^{i+j} \underbrace{\det A_{\boxed{ji}}}_{\text{Determinante der Untermatrizen}}$$

Beispiel $n=2$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} a_{22} & (-1)^{1+2} a_{21} \\ (-1)^{2+1} a_{12} & (-1)^{2+2} a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ siehe Abschnitt 10.6

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Ist diese Matrix invertierbar?

$\det A = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1)^2 = 8 - 2 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ A ist invertierbar

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$