

Zahlbereiche und Folgen

Die natürlichen, die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen

1. Ordnen Sie die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach an:

$$\frac{9}{11}, \quad \frac{37}{45}, \quad \frac{121}{78}, \quad \frac{178}{222}, \quad \frac{76}{88}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden rationalen Zahlen:

$$\frac{18}{17} + \frac{9}{2}, \quad \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{15}, \quad \frac{18}{17} - \frac{9}{2}, \quad \frac{11}{5} + \frac{7}{15}.$$

3. Es seien $0 \neq a, b \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen. Mit welchen der folgenden Zahlen stimmt $q = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ für jede Wahl von a und b überein:

$$r = \frac{1}{a-b}, \quad s = \frac{ab}{a+b}, \quad t = \frac{b-a}{ab}, \quad u = \frac{a-b}{ab}.$$

4. Zeigen Sie, dass zwei positive reelle Zahlen $x, y \in (0, \infty)$ stets die Ungleichung

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

erfüllen. Für welche Werte von x und y gilt die Gleichheit?

Konvergenz von Folgen

5. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Gliedern

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Zeigen Sie, dass die Folge eine Nullfolge ist. Bestimmen Sie dazu eine Zahl N , so dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wenn

- $\varepsilon = \frac{1}{10}$,
 - $\varepsilon = \frac{1}{100}$,
 - $\varepsilon > 0$ beliebig.
6. Sei $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ eine Zahl N , so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

7. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Gliedern

$$a_n = \frac{n(n+3) - 4}{n^2 - 1}.$$

Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge. Bestimmen Sie dazu ein N so, dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wenn

a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$,

b) $\varepsilon = \frac{1}{100}$,

c) $\varepsilon > 0$ beliebig.

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge. *Hinweis:* Vereinfachen Sie den Ausdruck $|a_n - 1|$ zunächst.

8. Sind die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren allgemeine Glieder a_n durch die angegebenen Ausdrücke bestimmt sind, Nullfolgen?

a) $\frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$ b) $\frac{3}{\sqrt{n^2 + 1}}$ c) $\frac{n+1}{n+2}$

d) $\frac{1 + \sqrt{n}}{n^3}$ e) $\frac{1}{\sqrt{n^3 + 5n}}$ f) $\frac{\sin n + \cos^3 n}{\sqrt{n}}$

g) $\frac{\sin n}{2 + \sqrt[3]{n^5}}$ h) $\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$ i) $n(\sqrt{n^4 + 4} - n^2)$

9. Bestimmen Sie für $n \rightarrow \infty$ den Grenzwert der angegebenen Folgen, falls er existiert.

a) $\frac{n^2 + n}{n^2 - n}$ b) $\frac{n^2 + 100n - 1000}{n^2 + 1}$ c) $\frac{\frac{1}{2}n^3 - n^2 + 1}{3n^3 - n + 800}$

d) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ e) $(-1)^n$