Fachbereich Physik
Mathematischer Vorkurs
Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster

Technische Universität Kaiserslautern
Blatt 2, Wintersemester 2019/2020
Julius Bohm, Martin Bonkhoff

Reihen und Funktionen

Partialsummen und Reihen

1. Berechnen Sie
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \ .$$

2. Berechnen Sie
$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^{k+2}} \right) \ .$$

3. Berechnen Sie
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \ .$$
Hinweis: Schreiben Sie dazu zunächst $\frac{1}{k(k+1)}$ in der Form $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ für geeignete Zahlen A und B. Berechnen Sie darauf die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \right]$ und bestimmen Sie den Grenzwert $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

4. Eine Schülerin legt jährlich 100 Euro ihres Geburtstagsgeldes auf ein Sparbuch. Dieses ist mit 3 Prozent Zinseszinsen jährlich verzinst. Welchen Wert hat das Sparbuch nach 10 Jahren?

5. Im Pyramidentraining beginnen Sportler/innen eine Übung (zum Beispiel Liegestütze) mit Pausen zuerst einmal, dann zweimal, aufsteigend bis zu n mal zu wiederholen und im Anschluss daran absteigend von $n-1$ mal bis zurück zu einmal. Jemandem fällt auf, dass es so wirkt, als würde man insgesamt n^2 Wiederholungen durchführen. Stimmt diese Vermutung?

Potenzreihen

6. Leiten Sie die folgenden Eigenschaften des Sinus und des Cosinus aus ihrer Reihendarstellung ab:
Für $x \in \mathbb{R}$ gelten
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
und
$$\cos(-x) = \cos(x) \ .$$
Wir nennen den Sinus eine *ungerade* Funktion und den Cosinus eine *gerade* Funktion.

Funktionen und ihre Grenzwerte

7. Bestimmen Sie die größtmöglichen Definitionsbereiche I der Funktionen f: I$\to\mathbb{R}$ mit:

   (a) $f(x) = \ln(x+2)$.

   (b) $f(x) = \frac{x+\frac{1}{x}}{x}$.

   (c) $f(x) = \tan(3x)$.

   Welche Werte können die Funktionen annehmen, d.h. was sind ihre Bilder?

8. Bestimmen Sie die Bilder der folgenden Funktionen f: I$\to\mathbb{R}$:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ mit I$= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 1\}$.

   (b) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ mit I$= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -3\}$.

   (c) $f(x) = e^{x^2}$ mit I$=\mathbb{R}$.

9. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf der Funktion $f(t) = \sin 2t + \sin 4t$ und bestimmen Sie ihre Nullstellen.

10. Berechnen Sie den Ausdruck $\ln(\frac{x}{y}) + \ln(\frac{y}{x})$.

11. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

    (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{7x+3}{9x+137}$.

    (b) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-4}{x-1}$.

    (c) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

12. Die Funktion $f(x)$ sei definiert durch $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ und unterscheiden Sie dabei die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$. *Hinweis*: Erweitern Sie den Bruch mit $\sqrt{x} + \sqrt{a}$.

13. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihr Verhalten für gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ strebendes x und berechnen Sie, falls möglich, die entsprechenden Grenzwerte.

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x-3}{x^2-x-2}, \quad h(x) = \frac{x^2-4}{x+3},$$

$$i(x) = \frac{2x^3+6x^2-2x-6}{x^2-x}, \quad j(x) = e^{x^2-x} + 2 \ .$$