Fachbereich Physik
Mathematischer Vorkurs
Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster

Technische Universität Kaiserslautern
Blatt 3, Wintersemester 2019/2020
Julius Bohm, Martin Bonkhoff

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Ableitungen

a) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(i) $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$.
(ii) $f(x) = \sqrt{x^3+4}$.
(iii) $f(x) = \frac{1}{x}$.
(iv) $f(x) = \cos^2(x) \cdot \sin^2(x)$.
(v) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
(vi) $f(x) = (x^3+x)^6$.
(vii) $f(x) = \cos(\sin(x))$.

b) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$:

(i) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ mit $a = 0$.
(ii) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ mit $a = 0$.
(iii) $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ mit $a = 1$.
(iv) $f(x) = \frac{x^2+4}{x-4}$ mit $a = 4$.
(v) $f(x) = \sqrt{e^{\cos(\sqrt{x})}}$ mit $a = 0$.

c) Berechnen Sie die Ableitungen des Cosinus Hyperbolicus

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

und des Sinus Hyperbolicus

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2. Reihendarstellung

Eine Funktion, deren Abbildungsvorschrift

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

durch eine Reihe gegeben ist (es sei angenommen, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiere), ist differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$

Verwenden Sie diese Tatsache und die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, um die Ableitungsregeln für diese Funktionen zu verifizieren.

3. Umkehrfunktion

Verifizieren Sie die Ableitungsregeln für den Arcussinus

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion. Nutzen Sie dabei das Additionstheorem $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

4. Stetigkeit

Wie muß man die reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ wählen, damit die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq \frac{\pi}{4} \\ ax + b & x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist?

5. Zwischenwertsatz

Ich fahre morgens mit dem Fahrrad von zu Hause zur Arbeit und nachmittags fahre ich mit dem Fahrrad auf dem gleichen Weg zurück. Wenn ich für beide Strecken exakt die gleiche Zeit benötige, gibt es dann eine Stelle auf der Strecke, die ich auf dem Hinweg und auf dem Rückweg jeweils nach derselben Zeit erreiche?

6. Polynomdivision

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Vereinfachen Sie dazu die Ausdrücke zunächst mit Hilfe der Polynomdivision.

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 6x^2 - x + 6}{x - 1}$.

b) $\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$.