Fachbereich Physik
Mathematischer Vorkurs
Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster

Technische Universität Kaiserslautern
Blatt 4, Wintersemester 2019/2020
Julius Bohm, Martin Bonkhoff

Anwendung Ableitungen und Taylorreihen

1. Kurvendiskussion

Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Polstellen und die Grenzwerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = x^3 - 2x^2 - x. \qquad f_2(x) = -x^3(x-2).$$

$$f_3(x) = \frac{x-7}{x-3}. \qquad f_4(x) = \frac{x}{(x-3)(x-7)}.$$

2. Minimierung

Gesucht ist ein Zylinder, der bei konstantem Volumen eine möglichst kleine Oberfläche hat. In welchem Verhältnis stehen dann Höhe und Durchmesser der Zylinders?

3. Die Taylorreihe

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktion und $a \in I$, dann heißt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

die *Taylorreihe* von f mit Entwicklungspunkt a.

a) Berechnen Sie den Anfang der Taylorreihe der Funktion $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \tan(x)$$

für den Entwicklungspunkt $a = 0$ bis einschließlich des Gliedes 3. Ordnung.

b) Berechnen Sie den Anfang der Taylorreihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

für den Entwicklungspunkt $a = 0$ bis einschließlich des Gliedes 3. Ordnung.

c) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

für den Entwicklungspunkt $a = 0$.

d) Betrachten Sie die in der Vorlesung angegebene Taylorreihe der Funktion $f(x) = \cos(x)$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion um $x = 0$ zusammen mit der linearen Näherung (Taylor-Entwicklung bis einschließlich des Gliedes 1. Ordnung) und der quadratischen Näherung (Taylor-Entwicklung bis einschließlich des Gliedes 2. Ordnung).

4. Differentialgleichungen

a) Ein Wachstumsvorgang gehorche der Differentialgleichung $\dot{f}(t) = 0.02\, f(t)$. Zur Zeit $t = 0$ war die Anzahl f der Individuen gleich 3000. Wie groß ist die Anzahl $t = 50$ Zeiteinheiten später?

b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) = -g$$

mit den Anfangsbedingungen $\dot{z}(0) = 0$ und $z(0) = h$. Dabei seien g und h positive Konstanten. Erkennen Sie das physikalische Problem dahinter?