

Integralrechnung

1. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

- a) $\int_1^3 (x^5 - 2) dx.$
- b) $\int_0^\pi \sin(x) dx.$
- c) $\int_0^\pi \cos(x) dx.$
- d) $\int_2^7 (x^2 + x^{13} - 9228x^7) dx.$
- e) $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx.$
- f) $\int_0^\pi \sin^2(x) dx.$
- g) $\int_0^\pi \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx.$
- h) $\int_1^e \frac{1}{x \cdot (1+\ln(x))} dx.$
- i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x) dx.$
- j) $\int_{-3}^4 |x| dx.$
- k) $\int_y^2 (3x^2 + 7x + 17) dx.$

2. Unbestimmte Integrale

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

- a) $f_1(x) = e^x + \sin(x).$
- b) $f_2(x) = e^{2x} + \frac{3}{1+x^2}.$
- c) $f_3(x) = \frac{1}{x+2}.$
- d) $f_4(x) = \frac{2x}{x^2+2}.$
- e) $f_5(x) = x \cdot e^x.$
- f) $f_6(x) = x^2 \cdot e^x.$
- g) $f_7(x) = e^{\cos(x)} \cdot \sin(x).$
- h) $f_8(x) = \tan(x).$

3. Flächeninhalt

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Graphen von f und g eingeschlossenen Flächenstücks für

(i) $f(x) = 1, \quad g(x) = x^2.$

(ii) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 5, \quad g(x) = 2.$

(iii) $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 2x^2 + x.$

b) Welches geometrische Gebilde wird durch die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

beschrieben? Berechnen Sie die Fläche des Einheitskreises durch Integration von $f(x)$.

4. Vertauschen von Grenzen

Zeigen Sie, für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung

$$\int_0^a |x| dx = \frac{a \cdot |a|}{2}.$$

5. Gliedweise Integration einer Reihe

Es gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Schreiben Sie diesen Ausdruck mit Hilfe der geometrischen Reihe als Reihe und berechnen Sie durch gliedweise Integration eine Reihendarstellung für den Arcustangens. Wenn Sie dann noch $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ beachten, so können Sie eine Reihendarstellung für die Zahl π herleiten.