

## Komplexe Zahlen

### 1. Rechnen mit komplexen Zahlen

- a) Sei  $u = 1 + i$ ,  $w = -1 + i$ . Berechnen Sie  $u + w$  und  $u \cdot w$ .
- b) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen den Realteil, den Imaginärteil, den Betrag und das komplex Konjugierte:

$$u = 4 + 12i, \quad v = (1 + i)^2.$$

- c) Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils auf die Form  $a + bi$ :

$$u = \frac{1}{8 - 9i}, \quad v = \frac{3 + 7i}{8 - 9i}.$$

- d) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen wie in Aufgabe b) den Realteil, den Imaginärteil, den Betrag, das komplex Konjugierte und zusätzlich das multiplikative Inverse:

$$u = \frac{4i}{1 + i}, \quad v = \frac{(2 + 2i)^7}{(1 - i)^2}.$$

- e) Seien  $a = a_1 + a_2i$  und  $b = b_1 + b_2i$  gegeben mit reellen Zahlen  $a_1, a_2, b_1, b_2$ . Berechnen Sie  $\operatorname{Re}(a\bar{b})$  und  $\operatorname{Im}(a\bar{b})$ .
- f) Sei  $u = 3 + i$  und  $w = 1 - i$ . Berechnen Sie  $\frac{u}{w^2}$ .
- g) Auf welcher Kurve in der komplexen  $z$ -Ebene liegen alle komplexen Zahlen, die die Bedingung  $z^2 + (\bar{z})^2 = 2$  erfüllen?
- h) Wo liegt der geometrische Ort aller Punkte  $z$ , die die beiden Bedingungen  $|z| \leq 2$  und  $\operatorname{Re} z \geq 1/2$  erfüllen?
- i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen  $z^2 = -4$  und  $z^2 - 2z + 10 = 0$ .

### 2. Polardarstellung der komplexen Zahlen

- a) Schreiben Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die folgenden komplexen Zahlen in polarer Form:  $u = 1 + i$ ,  $v = 1 - i$ ,  $w = -3i$ ,  $z = 3 + i$ .
- b) Sei  $u = e^{i\pi/3}$  und  $w = 2e^{i\pi/6}$ . Berechnen Sie  $u + w$ ,  $u \cdot w$  und  $\frac{u}{w}$ .
- c) Seien  $a = |a|e^{i\alpha}$  und  $b = |b|e^{i\beta}$  gegeben. Drücken Sie  $\operatorname{Re}(a\bar{b})$  und  $\operatorname{Im}(a\bar{b})$  durch  $|a|$ ,  $|b|$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  aus.

d) Geben Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$\frac{2}{1 - e^{i\phi}}$$

an. (Es sei  $\phi \neq 2\pi n$  für alle ganzzahligen  $n$  vorausgesetzt.)

- e) Welche Kurve beschreibt der Endpunkt des Vektors  $\vec{a} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ , wenn  $\phi$  von  $0^0$  bis  $180^0$  variiert?
- f) Welche Kurve durchläuft der Vektor  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = t(\cos t, \sin t, 1)$ , wenn  $t$  das Intervall von 0 bis  $2\pi$  durchläuft?