Fachbereich Physik
Mathematischer Vorkurs
Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster

Technische Universität Kaiserslautern
Blatt 7, Wintersemester 2019/2020
Julius Bohm, Martin Bonkhoff

Skalar- und Vektorprodukt

1. Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

a) Zwei Punkte P_1 und P_2 sind durch ihre Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ausgehend vom Ursprung gegeben. Wie groß ist ihr Abstand?

b) Sind die Vektoren $\vec{a} = (3, 7, 4)$ und $\vec{b} = (9, 21, 12)$ parallel?

c) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 4)$, $\vec{c} = (-3, -1)$ und $\vec{d} = (-2, 1)$. Berechnen Sie $(\vec{a} + \vec{b}\,) \cdot (\vec{c} - \vec{d}\,)$ und $(\vec{a} - \vec{b}\,) \cdot (\vec{c} + \vec{d}\,)$.

d) Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a} = (1, 7, 0)$ und $\vec{b} = (1, 1, 1)$ ein? Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a} = (2, -1, 2)$ und $\vec{b} = (7, -1, 0)$ ein?

e) Berechnen Sie den Winkel, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen, wenn gilt $(\vec{a} + \vec{b}\,) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}\,) = 0$ und $a = 2b$.

f) Stehen die Vektoren $\vec{a} = (1.1, 7.1, -0.1)$ und $\vec{b} = (6, -1, -5)$ senkrecht aufeinander?

g) Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein, wenn gilt $a = 2$, $b = 1$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

2. Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Vereinfachen Sie $(a + 7b + 3c\,) \times (7a + 5b + 4c\,)$.

b) Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ für $\vec{a} = (1, 7, 0)$ und $\vec{b} = (1, 1, 1)$.

c) Welche Vektoren mit Betrag 1 stehen senkrecht auf den beiden Vektoren $\vec{a} = (1, 1, 1)$ und $\vec{b} = (1, 1, -1)$?

d) Der Vektor $(1, a, b) \in \mathbb{R}^3$ steht senkrecht auf den beiden Vektoren $(4, 3, 0)$ und $(5, 1, 7)$. Berechnen Sie a und b.

e) Es seien $\vec{n}$ und $\vec{m}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$, die aufeinander senkrecht stehen und für die gilt $|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1$. Beschreiben Sie den geometrischen Ort aller Punkte $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die die Gleichung $\vec{x} \times \vec{m} = \vec{n}$ erfüllen.

f) Zeigen Sie für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, dass gilt $|\vec{x} \times \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$.

g) Beweisen Sie für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ die Grassmann-Identität

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}.$$

Folgeren Sie daraus die Jacobi-Identität

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = 0.$$