Fachbereich Physik | Technische Universität Kaiserslautern
Mathematischer Vorkurs | **Blatt 8, Wintersemester 2019/2020**
Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster | Julius Bohm, Martin Bonkhoff

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

1. Matrizen

a) Berechnen Sie die folgenden Summen von Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Welche der folgenden Matrizen können in welcher Reihenfolge miteinander multipliziert werden? Berechnen Sie ggf. das Matrixprodukt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie das Produkt $M\,\vec{b}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -7 & 10 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

und $\vec{b} = (1, 3, -1)^\top$.

2. Lineare Gleichungssysteme

a) Berechnen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems, sofern es lösbar ist:

$$\begin{aligned} -x + 6y + 2z &= 4 \\ 2x - 2y - z &= 2 \\ 3x - 4y - 2z &= 1. \end{aligned}$$

c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + z &= ab \\ -2x + by + az &= -b \\ by + (a+1)z &= b \end{aligned}$$

neben $(x, y, z)^\top = (b, 1, 0)^\top$ noch weitere Lösungen? Bestimmen Sie diese.

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ty + z &= 1 \\ tx + ty + z &= 1 + t. \end{aligned}$$

Für welche Werte von t besitzt das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung?

3. Drehmatrix

Man nennt eine Matrix der Form

$$D(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$, da sie Vektoren in der Ebene um den Winkel ϑ im mathematisch positiven Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn) dreht.

a) Berechnen Sie für die $\mathbb{R}^2$-Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1,0)^T$, $\vec{e}_2 = (0,1)^T$ jeweils $D(\vartheta)\vec{e}_i$, sowie die Skalarprodukte $(D(\vartheta)\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j$ und die Beträge $|D(\vartheta)\vec{e}_i|$ für $i, j \in \{1,2\}$.

b) Berechnen Sie $DD^\top$.

c) Berechnen Sie die Determinante von $D(\vartheta)$. Hängt das Ergebnis vom Winkel ϑ ab?

d) Zeigen Sie, dass gilt

$$D(\vartheta_1)D(\vartheta_2) = D(\vartheta_1 + \vartheta_2).$$