

1. Gegeben sei die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit den Gliedern

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Zeigen Sie, dass die Folge eine Nullfolge ist. Bestimmen Sie dazu eine Zahl  $N$ , so dass  $|a_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ , wenn

- a)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ,
- b)  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ,
- c)  $\varepsilon > 0$  beliebig.

2. Berechnen Sie

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} .$$

3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x+3}{9x+137} .$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-4}{x-1} .$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{\sqrt{x}-1} .$

4. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (i)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} .$
- (ii)  $f(x) = \frac{1}{x} .$
- (iii)  $f(x) = \cos^2(x) \cdot \sin^2(x) .$
- (iv)  $f(x) = \tan(4x^2) .$

5. Berechnen Sie schrittweise die folgenden Integrale:

- (a)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta .$
- (b)  $\int_0^{\pi} \sin(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha .$
- (c)  $\int_{-3}^4 |x| dx .$
- (d)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx .$

6. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion (mit Begründung):

(a)  $f(\phi) = 1$ .

(b)  $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$ .

(c)  $f(\theta) = \sqrt{\theta}$ .

(d)  $f(x) = \frac{6x}{x^2+4}$ .

(e)  $f(x) = \tan(x)$ .

7. Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen den Realteil, den Imaginärteil, den Betrag, das komplex Konjugierte und zusätzlich das multiplikative Inverse:

$$u = \frac{2i}{2+i}, \quad v = \frac{(1+i)^7}{e^{i\frac{\pi}{2}}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  und  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

8. Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = (1, 1, 0)^T$$

$$\vec{b} = (3, 0, 7)^T$$

$$\vec{c} = (4, 2, 1)^T.$$

Bestimmen Sie den Winkel  $\angle(\vec{x}, \vec{y})$  zwischen den Vektoren:

$$\vec{x} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}),$$

$$\vec{y} = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a}.$$

9. Berechnen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems, sofern es lösbar ist:

$$-x + 6y + 2z = 4$$

$$2x - 2y - z = 2$$

$$3x - 4y - 2z = 1.$$