Kapitel 1: Zahlbereiche

In diesem Kapitel werden wir die aus der Schule bekannten Zahlbereiche der natürlichen, der ganzen, der rationalen und der irrationalen Zahlen von einem etwas höheren Standpunkt aus betrachten. Dabei werden viele Eigenschaften, die wohl bekannt sind, nochmals systematisch zusammen gestellt und näher beleuchtet.

1.1 Übersicht:

Wir werden zunächst die aus der Schule bekannten Zahlbereiche in Erinnerung rufen. Hierzu setzen wir die folgenden Zahlbereiche als bekannt voraus:

a) Die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

heißt die Menge der natürlichen Zahlen. Nimmt man die Null hinzu, gilt

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

b) Die Menge

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

heißt die Menge der ganzen Zahlen.

c) Die Menge

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0\right\}$$

heißt die Menge der rationalen Zahlen.

d) Die Menge aller Dezimalzahlen

$$\mathbb{R} = \{a_{-n}\, a_{-(n-1)} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_i \in \{0, \dots, 9\};\ i, n \geq 0\}$$
$$= \left\{\sum_{i=-n}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i} \,\middle|\, a_i \in \{0, \dots, 9\};\ i, n \geq 0\right\}$$

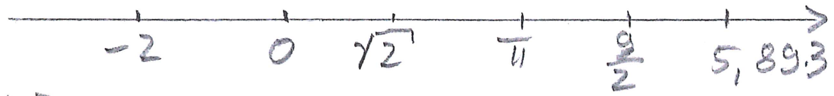
heißt die Menge der reellen Zahlen.

Beispiel:

$$178{,}576 = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

$a_{-2} = 1, a_{-1} = 7, a_0 = 8, a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 6$

Bemerkung 1:
Alle reellen Zahlen lassen sich auf einer Zahlengeraden darstellen:



Bemerkung 2:
Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch ist nicht eindeutig. Zwei Brüche a/b und c/d sind z.B. genau dann gleich, falls $ad = bc$.

Beispiel: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-4}{-8}$

Die Darstellung a/b ist eindeutig, falls man fordert, dass a und b teilerfremd sind und dass b positiv ist.

Bemerkung 3:
Jede rationale Zahl kann als Bruch oder als Dezimalzahl

a) mit endlich vielen Nachkommastellen
z.B. $\frac{1}{4} = 0,25$

b) oder als periodische Dezimalzahl
z.B. $\frac{1}{3} = 0,333\ldots = 0,\overline{3}$

geschrieben werden. Umgekehrt kann man aber auch

c) jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen als Bruch schreiben
z.B. $0,xyz = \frac{xyz}{1000}$; $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

d) jede periodische Dezimalzahl als Bruch schreiben
z.B. $0,\overline{xyz} = \frac{xyz}{999}$; $0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

1.2 Wichtige Rechenregeln und Eigenschaften reeller Zahlen

Von der Schule her kennen wir für die reellen Zahlen vier Grundrechenarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. In der Mathematik hat es sich aber als sinnvoll erwiesen, nur die beiden

Operationen Addition und Multiplikation als eigenständige Operationen zu betrachten, und die anderen beiden als Addition und Multiplikation mit geeigneten Zahlen aufzufassen. Dadurch reduziert sich die Anzahl an Rechenregeln, die man sich merken muss, erheblich.

1.7.1 Die Körperaxiome der reellen Zahlen:

Auf der Menge der reellen Zahlen sind zwei Operationen definiert, die Addition "+" und die Multiplikation "·".

Für die Addition gelten die Axiome:
Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(A1) Assoziativgesetz: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$(x+y)+z = x+(y+z)$

(A2) Kommutativgesetz: für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt
$x+y = y+x$

(A3) Neutrales Element 0: für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt
$x+0 = 0+x = x$

(A4) Negatives Element: zu jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es ihr Negatives $-x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft
$x+(-x) = (-x)+x = 0$

Für die Multiplikation gelten die Axiome:

(M1) Assoziativgesetz: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(M2) Kommutativgesetz: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$x \cdot y = y \cdot x$

(M3) Neutrales Element 1: für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt
$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

(M4) Inverses Element: zu jeder Zahl $0 \neq x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Inverses $x^{-1} = 1/x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft
$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = x$

Zusätzlich gelten für die Addition und die Multiplikation die Distributivgesetze: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(DG) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

$$(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

Eine Menge mit zwei Operationen, für die die obigen Axiome gelten, nennt man in der Mathematik einen Körper. Beispiele für Körper sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

1.2.2 Bemerkungen:

- Assoziativgesetze: Wir dürfen beim Addieren bzw. beim Multiplizieren Klammern umsetzen oder auch einfach weglassen.
- Kommutativgesetze: Wir dürfen beim Addieren bzw. Multiplizieren die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren vertauschen.
- Distributivgesetze: Sie regeln, was beim Auflösen von Klammern passiert.
- Das Axiom (A4) dient dazu, die Subtraktion einer Zahl y einzuführen als Addition mit einer geeigneten anderen Zahl $-y$, ihrem Negativen. Wir verwenden die Notation

$$x + (-y) = x - y$$

- Das Axiom (M4) dient dazu, die Division einer Zahl y einzuführen als Multiplikation mit einer geeigneten Zahl y^{-1}, ihrem Inversen. Wir verwenden die Notation

$$x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}$$

- Aufgrund von (M2) führen wir die folgende abkürzende Schreibweise ein

$$x \cdot y = xy$$

- Wir führen für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ die Potenzschreibweise

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}}$$

ein und ergänzen diese um die Festlegungen

$$x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{n \text{ mal}}$$

1.2.3 Ausgewählte Rechenregeln in $\mathbb{R}$:

Wir sammeln nun einige Rechenregeln, die in jedem Körper und damit auch in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gelten. Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$; $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

- Kürzungsregel der Addition:
  $x + y = x + z \implies y = z$
- Kürzungsregel der Multiplikation:
  $x \cdot y = x \cdot z, \quad x \neq 0 \implies y = z$
- Minus mal Minus gleich Plus:
  $-(-x) = x, \quad (-x)(-y) = xy$
- Null bei Multiplikation:
  $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ oder $y = 0$
- Multiplikation mit Null:
  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
- Doppeltes Invertieren tut nichts:
  $(x^{-1})^{-1} = x, \quad x \neq 0$
- Addition von Brüchen:
  $$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + yu}{uv}$$
- Multiplikation von Brüchen:
  $$\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{xy}{uv}$$
- Potenzgesetze:
  $$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$
  $$(x^n)^m = x^{nm}$$
  $$x^n \cdot y^n = (xy)^n$$

1.2.4 Definition einer Wurzel:

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gibt es genau eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und $a^n = x$. Wir nennen die Zahl die nte Wurzel aus x: $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{1/n}$.

- Bemerkung: Die Potenzgesetze gelten auch für rationale Exponenten, sofern die Basis nicht negativ ist.
- Beispiel: $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}}$