Kapitel 10: Matrizen

Wir lernen jetzt Matrizen kennen, die sich vielfältig in der Physik anwenden lassen. So lassen sich mit ihrer Hilfe Koordinatentransformationen wie eine Rotation beschreiben. Und es lassen sich lineare Gleichungssysteme mit Matrizen kompakt formulieren und effizient lösen.

10.1 Definitionen:

Es seien m, n natürliche Zahlen. Eine $m \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ ist ein rechteckiges Schema $A = (a_{ij})$ mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sowie $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine $m \times n$-Matrix besteht also m Zeilen und n Spalten.

Beispiel für 2×3-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ wird mit

$$\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$

bezeichnet. Falls $m = n$ vorliegt wird für die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen die Bezeichnung

$$\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

verwendet.

Beispiel für 2×2-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix, dann bezeichnen wir

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

als den $i$ten Zeilenvektor von A und entsprechend

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

als den $j$ten Spaltenvektor von A.

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix, so bezeichnet $A^T = (a^T_{ij})$ mit den Einträgen $a^T_{ij} = a_{ji}$ eine $n \times m$-Matrix, die man als transponierte Matrix bezeichnet:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiele: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Durch Transposition wird ein Zeilenvektor zu einem Spaltenvektor und umgekehrt:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}^T = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$$

10.2 Addition und Subtraktion von Matrizen:

Es seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$. Dann werden sie dadurch addiert bzw. subtrahiert, dass ihre entsprechenden Einträge addiert bzw. subtrahiert werden:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 6 \end{pmatrix}$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Kommutativität: $A + B = B + A$

b) Assoziativität: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) Linearität der Transposition: $(A + B)^T = A^T + B^T$

10.3 Multiplikation mit Skalar:

Auch die Multiplikation einer Matrix $A = (a_{ij}) \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$ mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$ ist komponentenweise definiert:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $2\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&0\\0&-14&2\end{pmatrix}$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Assoziativität: $k(lA)=(kl)A$

b) Distributivität:
$k(A+B)=kA+kB$, $\quad (k+l)A=kA+lA$

10.4 Multiplikation zweier Matrizen:

Es seien $A\in Mat(m\times p,\mathbb{R})$ und $B\in Mat(p\times n,\mathbb{R})$ zwei Matrizen. Wichtig ist dabei, dass die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt. Dann ist das Produkt $C=A\cdot B\in Mat(m\times n,\mathbb{R})$ der beiden Matrizen A und B definiert durch die Komponenten

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

Das bedeutet, dass sich das Element c_{ij} als Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A und des j-ten Spaltenvektors von B ergibt.

Beispiel: $A\in Mat(4\times 3,\mathbb{R})$, $B\in Mat(3\times 2,\mathbb{R})$, $C\in Mat(4\times 2,\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}5&-2&0\\1&3&2\\2&5&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&7\\2&-1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&37\\19&10\\21&12\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$A \quad\cdot\quad B \quad=\quad C$$

Bemerkungen:

a) Das Produkt $B\cdot A$ im obigen Beispiel ist nicht definiert, da die Zahl der Spalten von B, also 2, nicht mit der Zahl der Zeilen von A, also 4, übereinstimmt.

b) Im allgemeinen gilt für das Produkt von Matrizen, dass es nicht kommutativ ist:

$$A\cdot B\neq B\cdot A$$

c) Es ist $A\cdot B=0$ auch mit $A,B\neq 0$ möglich:

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

d) Mit der Matrizen-Multiplikation läßt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren definieren:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^{T}\cdot\vec{b}=(a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Assoziativität:

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C), \quad (\lambda A)\cdot B = A\cdot(\lambda B) = \lambda(A\cdot B)$$

b) Distributivität:

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C, \quad (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

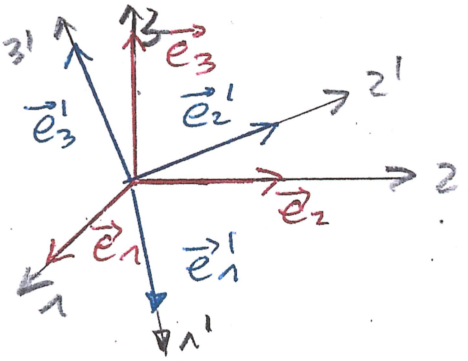
c) Transposition: $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Beweis mit Hilfe der Komponentenschreibweise:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)^T = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b^T_{ik} a^T_{kj}$$

10.5 Koordinaten-Transformation:

Die Komponenten-Darstellung eines Vektors hat einerseits den Vorteil, dass sie anschaulich ist, andererseits ist sie jedoch von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. Wir behandeln nun eine Transformation der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des ursprünglichen Koordinatensystems in die Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ des transformierten Koordinatensystems.



Ein Vektor $\vec{x}$ kann nun sowohl nach den Einheitsvektoren des alten und des neuen Koordinatensystems entwickelt werden:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \\ &= x_1' \vec{e}_1{}' + x_2' \vec{e}_2{}' + x_3' \vec{e}_3{}'\end{aligned}$$

Die jeweiligen Entwicklungskoeffizienten x_1, x_2, x_3 bzw. x_1', x_2', x_3' ergeben sich dann nach Abschnitt 9.3 durch Projektion des Vektors $\vec{x}$ auf die jeweiligen Einheitsvektoren:

$$x_1 = \vec{x}\cdot\vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{x}\cdot\vec{e}_2, \quad x_3 = \vec{x}\cdot\vec{e}_3$$

$$x_1' = \vec{x}\cdot\vec{e}_1{}', \quad x_2' = \vec{x}\cdot\vec{e}_2{}', \quad x_3' = \vec{x}\cdot\vec{e}_3{}'$$

Ganz entsprechend lassen sich auch die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ nach den alten Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ entwickeln:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1{}' &= R_{11}\vec{e}_1 + R_{12}\vec{e}_2 + R_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2{}' &= R_{21}\vec{e}_1 + R_{22}\vec{e}_2 + R_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3{}' &= R_{31}\vec{e}_1 + R_{32}\vec{e}_2 + R_{33}\vec{e}_3\end{aligned}$$

In kompakter Schreibweise lautet dieser Zusammenhang:

$$\vec{e}\,'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\,\vec{e}_j$$

Die dabei auftretenden Matrixelemente R_{ij} sind durch die Skalarprodukte und damit durch die Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}\,'_i$ und $\vec{e}_j$ bestimmt:

$$R_{ij} = \vec{e}\,'_i \cdot \vec{e}_j = \cos \measuredangle(\vec{e}\,'_i, \vec{e}_j)$$

Aus der Forderung, dass sowohl die alten Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ als auch die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ orthonormal zueinander sind, gilt nach Abschnitt 9.3

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \qquad \vec{e}\,'_i \cdot \vec{e}\,'_j = \delta_{ij}$$

Hieraus folgt dann eine Einschränkung an die Matrix R:

$$\vec{e}\,'_k \cdot \vec{e}\,'_l = \sum_{i=1}^{3} R_{ki}\,\vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} R_{lj}\,\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} R_{ki} R_{lj}\,\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} R_{ki} R_{lj}\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} R_{ki} R_{li} = \sum_{i=1}^{3} R_{li} R^T_{ik} = \delta_{kl}$$

Diese Bedingung besagt, dass die Matrix R orthonormal ist, d.h. dass die jeweiligen Zeilen bzw. Spalten orthonormal zueinander sind:

$$R\,R^T = R^T R = E$$

Hierbei bezeichnet $E = (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix. Aus dem Transformationsgesetz für die Einheitsvektoren folgt nun aber auch ein entsprechendes Transformationsgesetz für die Komponenten eines Vektors $\vec{x}$:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x'_i\,\vec{e}\,'_i = \sum_{i=1}^{3} x'_i \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\,\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} x'_i R_{ij} \right) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x_j\,\vec{e}_j$$

$$\Rightarrow x_j = \sum_{i=1}^{3} x'_i R_{ij} = \sum_{i=1}^{3} R^T_{ji}\,x'_i$$

In Vektorschreibweise heißt dies:

$$\vec{x} = R^T \vec{x}\,' \iff \vec{x}\,' = R\,x$$

Dieses Ergebnis wird zur strengen mathematischen Definition eines Vektors herangezogen. Ein System von drei Elementen x_1, x_2, x_3 ist genau dann ein Vektor, wenn es sich beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem genauso transformiert. Dem-nach stellen z.B. die Masse, die Zeit und die x-Koordinate nicht die Komponenten eines Vektors dar.

10.6 Inverse Matrizen:

Für Matrizen ist eine Division nicht erklärt. Die Gleichung

$$A \cdot X = B$$

läßt sich nicht ohne weiteres nach X auflösen. Für die Teilmenge quadratischer Matrizen kann man aber inverse Matrizen bezüglich der Matrizen-Multiplikation finden.

Es sei $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Dann heißt eine ebenfalls quadratische Matrix $A^{-1} \in Mat(n, \mathbb{R})$ die zu A inverse Matrix, falls gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Beispiele:

a) $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

b) $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Bemerkung: Besitzt A eine Inverse A^{-1}, so ist diese dann eindeutig.

Beweis: Gäbe es mit A^{-1} und A_{-1} zwei Inverse von A gälte also

$$A^{-1} A = A A^{-1} = E, \quad A_{-1} A = A A_{-1} = E$$

dann folgt

$A_{-1} = A_{-1} \cdot E = A_{-1}(A \cdot A^{-1}) = (A_{-1} A) A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

c) $(cA^{-1}) = \frac{1}{c} A^{-1}$

d) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Beweis: $B^{-1} A^{-1} = B^{-1} A^{-1} E = B^{-1} A^{-1} \cdot A B \cdot (AB)^{-1}$
$= B^{-1}(A^{-1} A) B (AB)^{-1} = B^{-1} B \cdot (AB)^{-1} = (AB)^{-1}$

e.) Orthonormale Matrizen: $R R^{T} = R^{T} R = E$

$\Rightarrow R^{T} = R^{-1}$