Kapitel 11: Determinanten

Jeder quadratischen Matrix kann man eine Zahl zuordnen, die man als Determinante bezeichnet. Sie sind ein nützliches Hilfsmittel, um zu prüfen, ob eine quadratische Matrix ein Inverses besitzt. Falls die inverse Matrix existiert, kann man sie mit Hilfe von Determinanten berechnen.

11.1 Definitionen:

Es sei $Mat(n, \mathbb{R})$ die Menge aller quadratischen Matrizen auf $\mathbb{R}$. Dann bezeichnet die Determinante die Abbildung

$$\det : Mat(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Im Falle $n=2$ ist die Determinante einer 2×2 Matrix definiert durch

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Entsprechend gilt im Falle $n=3$ für die Determinante einer 3×3-Matrix die Regel von Sarrus, die auch als Jägerzaun-Regel benannt wird:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 1 - (1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 0 + 3\cdot 1\cdot 0)$$

$$= 1 + 6 - 4 = 3$$

Die Determinante einer 3×3-Matrix läßt sich z.B. beim Vektorprodukt verwenden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Sie tritt aber auch beim Spatprodukt auf:

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3)$$

11.2 Laplacescher Entwicklungssatz:

Im allgemeinen Falle einer $n\times n$-Matrix mit $n \geq 3$ wendet man den Laplaceschen Entwicklungssatz an, um eine Determinante zu berechnen. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$. Dann bezeichnet $A_{ij} \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ diejenige Matrix, die man durch Streichen der $i$ten Zeile und der $j$ten Spalte aus A erhält:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dann gilt für jede Zeile i mit $1 \leq i \leq n$:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

Entsprechendes gilt für jede Spalte j.

Als Beispiel betrachten wir dieselbe 3×3 Matrix wieder:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{i=1}{=}} 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot(-1) + 2(3-2) = 1 + 2 = 3 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{j=2}{=}} -1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= -1\cdot(-1) + 2\cdot(-2) - 1\cdot(-6) = 1 - 4 + 6 = 3 \checkmark$$

Bemerkungen:

a) Es ist also sinnvoll, nach einer Zeile bzw. Spalte zu entwickeln, die möglichst viele Nullen enthält.

b) Die Vorzeichenverteilung kann man sich dabei als "Schachbrettmuster" vorstellen, wobei die Hauptdiagonale nur aus Pluszeichen besteht.

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Hauptdiagonale

11.3 Eigenschaften:

a) $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

b) $\det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \lambda a_{mj} & \cdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{mj} & \cdots \end{pmatrix}$

d) Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

e) $\det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

f) $\det \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{ml} & \cdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j}+\lambda a_{1l} & \cdots & a_{1l} \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_{mj}+\lambda a_{ml} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}$

g) $\det A = \det A^T$

h.) $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ ist nicht invertierbar, da die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear abhängig sind.

i) Produktsatz: $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Spezialfall: $A \cdot A^{-1} = E$

$\det(A A^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}) = \det E \overset{a)}{=} 1$

$$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Ist also $\det A = 0$, dann existiert A^{-1} nicht, siehe h).

j) Orthonormale Matrizen:

$$\frac{1}{\det R} \overset{i)}{=} \det R^{-1} \overset{R^T=R^{-1}}{=} \det R^T \overset{g)}{=} \det R \Rightarrow \det R = \pm 1$$

Man wählt üblicherweise eine orthonormale Matrix mit der Eigenschaft $\det R = 1$, da dann ein Rechtssystem wieder in ein Rechtssystem abgebildet wird.

Wir wenden nun diese Determinanten-Eigenschaften an, um die Determinante der obigen 3×3-Matrix erneut zu berechnen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(III)\leftrightarrow(II)}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(III)-\frac{1}{3}(I)}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(III)-\frac{1}{3}(II)}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot 1\cdot(-1) = 3 \checkmark$$

11.4 Inverse Matrix:

Mit Hilfe der Cramerschen Regel läßt sich das Inverse einer Matrix A, sofern dieses existiert, durch Determinanten berechnen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A, \quad (\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{adj} A$ die Adjunkte der Matrix A.

Beispiel für $n=2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{21} \\ (-1)^{2+1}a_{12} & (-1)^{2+2}a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dieses Ergebnis hatten wir schon in Abschnitt 10.6 erwähnt.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = 8+0+0-(2+2+0) = 4$$

Die Adjunkte von A ist nun eine 3×3-Matrix mit Determinanten von 2×2-Matrizen als Einträgen:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$