Kapitel 12: Lineare Gleichungssysteme

Bei vielen praktischen Fragestellungen treten lineare Gleichungssysteme auf. Es handelt sich hierbei um lineare Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten, die alle gleichzeitig erfüllt sein sollen.

12.1 Definition:

Allgemein läßt sich ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten immer auf die folgende Form bringen:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Lineare Gleichungssysteme, bei denen alle b_i mit $i = 1,\dots,n$ gleich Null sind, werden homogen genannt, andernfalls inhomogen. Homogene Gleichungssysteme besitzen stets mindestens die sogenannte triviale Lösung, bei der alle Unbekannten gleich Null sind. Bei inhomogenen Gleichungssystemen kann dagegen der Fall eintreten, daß überhaupt keine Lösung existiert.

12.2 Matrixform:

Für die Behandlung linearer Gleichungssysteme ist es nützlich, alle Koeffizienten a_{ij} zu einer Matrix A, der sogenannten Koeffizientenmatrix, zusammenzufassen. Entsprechend lassen sich auch alle Unbekannten und die rechte Seite des Gleichungssystems zu Vektoren, also einspaltigen Matrizen, zusammenfassen:

$$
A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Damit schreibt sich ein lineares Gleichungssystem unter Benutzung der Matrix-Multiplikation kurz

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

12.3 Lösbarkeit:

Ein Vektor $\vec{x}$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems, wenn $A\vec{x} = \vec{b}$ gilt. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems bezeichnet man als:

$$\mathbb{L} = \{ \vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b} \}$$

Ob und wie viele Lösungen ein lineares Gleichungssystem besitzt, ist unterschiedlich. Es können die folgenden Fälle auftreten:

a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, d.h. die Lösungsmenge ist die leere Menge $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$.

b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung, d.h. die Lösungsmenge enthält genau ein Element.

c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge enthält also dann unendlich viele n-Tupel, die alle Gleichungen des Systems lösen.

12.4 Gauß-Verfahren:

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems läßt sich grundsätzlich mit Hilfe der erweiterten Koeffizientenmatrix bestimmen. Hierzu fügt man an die Koeffizientenmatrix A eine Spalte mit dem Inhomogenitätenvektor $\vec{b}$ hinzu:

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems verändert sich nicht, wenn eine der drei elementaren Zeilenumformungen vorgenommen wird:

a) Vertauschung zweier Zeilen

b) Multiplizieren einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl

c) Addieren einer Zeile oder des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Im Rahmen des Gauß-Verfahrens wendet man diese drei elementaren Zeilenumformungen iterativ an, um die erweiterte Koeffizientenmatrix in die sogenannte Stufenform zu überführen:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & \cdots & a'_{kn} & b'_k \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_m
\end{array}\right)$$

Um immer genau diese Form zu erhalten, muss man manchmal auch Spaltenvertauschungen vornehmen. Die ändern dann die Reihenfolge der Variablen, was man am Ende berücksichtigen muss. Außerdem nehmen wir bei der obigen Stufenform an, dass $a'_{jj} \neq 0$ für $j = 1, \dots, k$. Die Anzahl der Lösungen läßt sich dann an den Koeffizienten b'_i mit $i = 1, \dots, m$ ablesen:

a) Ist mindestens ein b'_i mit $i = k+1, \dots, m$ von Null verschieden, so gibt es keine Lösung.

b) Sind alle $b'_{k+1}, \dots, b'_m$ gleich Null oder gilt $k = m$, so gilt

  i) Ist $k = n$, so ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar.

  ii) Ist $k < n$, so gibt es unendlich viele Lösungen. Der Lösungsraum hat die Dimension $n-k$.

12.5 Gauß-Jordan-Verfahren:

Durch weitere elementare Zeilenumformungen läßt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix von der Stufenform auf die reduzierte Stufenform bringen:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a''_{1,k+1} & \cdots & a''_{1n} & b''_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a''_{2,k+1} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a''_{k,k+1} & \cdots & a''_{kn} & b''_k \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b''_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b''_m
\end{array}\right)$$

Sofern es eine Lösung gibt, falls also $b''_{k+1} = \dots = b''_m = 0$

gilt oder $k = m$, dann lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \vdots \\ b''_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a''_{1,k+1} & -a''_{1,k+2} & \cdots & -a''_{1n} \\ -a''_{2,k+1} & -a''_{2,k+2} & \cdots & -a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a''_{k,k+1} & -a''_{k,k+2} & \cdots & -a''_{kn} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-k} \right\}$$

12.6 Beispiel für eindeutige Lösung:

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Es besteht die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir wenden nun elementare Zeilenumformungen an

$$\xrightarrow{(II)-2(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(III)+(II)]{(II)\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(I)-(II)\cdot 2]{(III)\cdot(-1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[(II)-2(III)]{(I)+3(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

Es gibt demnach eine eindeutige Lösung:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Diese eindeutige Lösung folgt auch durch Invertierung der Koeffizientenmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -3 + 2 - (-4) = 3$$

Da $\det A = 3 \neq 0$ ist, existiert die Inverse zu A:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ +3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Der eindeutige Lösungsvektor ergibt sich damit zu

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

12.7 Weiteres Beispiel:

Als letztes Beispiel sei das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet hier

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Elementare Zeilenumformungen ergeben zunächst

$$\begin{array}{l} (II) - (I) \\ (III) - 3(I) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (I) - \frac{1}{2}(II) \\ (II) \cdot 1/2 \\ (III) + (II) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Um die reduzierte Stufenform zu erhalten, müssen zweite und dritte Spalte vertauscht werden:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Lösung}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

Wegen der Vertauschung der zweiten und der dritten Spalte müssen aber auch die zweite und die dritte Komponente des Lösungsvektors vertauscht werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t \\ s \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$$

Probe:

$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -s+t + s + 1+t - 2t = 1$ ✓

$x_1 + x_2 - x_3 = -s+t + s - 1 - t = -1$ ✓

$3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -3s + 3t + 3s + 1 + t - 4t = 1$ ✓