Kapitel 2: Folgen

Folgen sind auf den ersten Blick ziemlich einfache mathematische Objekte, die für den Naturwissenschaftler aber auch z.B. für den Bankkaufmann sehr nützlich sind. Es handelt sich hierbei um eine Menge von Zahlen, die aufeinander folgen. Man kann sie nummerieren, sie sind also abzählbar, und man kennzeichnet sie daher zweckmäßig durch einen Index n, der die natürlichen Zahlen durchläuft.

2.1 Definition:

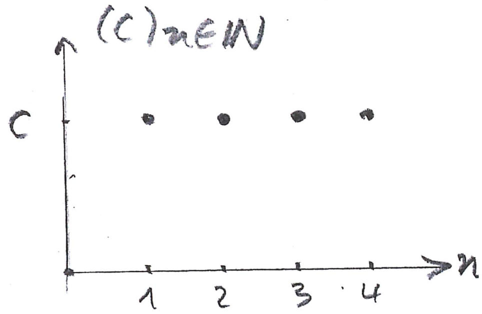
Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Vorschrift, bei der jeder natürlichen Zahl $n = 1, 2, 3, \dots$ eine Zahl a_n zugeordnet wird

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

2.2 Beispiele:

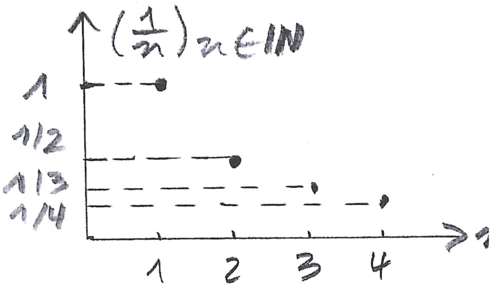
a) Konstante Folge: $c \in \mathbb{R}$

$$(c)_{n \in \mathbb{N}} = (c, c, c, c, \dots)$$



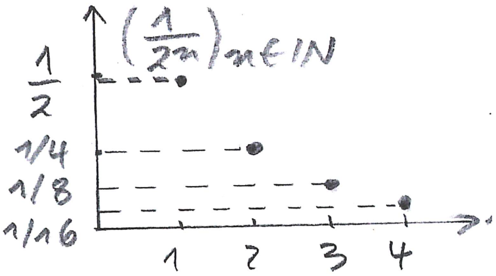
b) Harmonische Folge:

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$



c) Geometrische Folge: $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$

$$(x^n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x^2, x^3, x^4, \dots)$$



2.3 Konvergenz und Grenzwert:

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir nennen a einen Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

Notation: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Andernfalls nennen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, falls $a_n \to 0$.

Bemerkung: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

2.4 Beispiele:

a) Konstante Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_{n\in\mathbb{N}}$
Wähle für jedes $\varepsilon > 0$: $N_\varepsilon = 1$. Dann gilt für alle $n \geq N_\varepsilon = 1$:

$$|a_n - c| = 0 < \varepsilon$$

b) Die harmonische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge: Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle N_ε so, dass $0 < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Dann gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$:

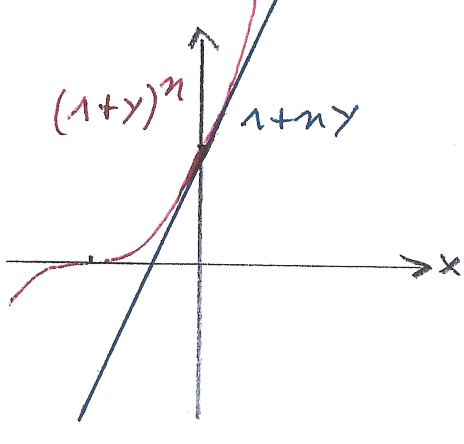
$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

c) Die geometrische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $|x| < 1$ eine Nullfolge: Es sei $x \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt zunächst $\frac{1}{|x|} > 1$, d.h. es gibt ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ so dass $y = \frac{1}{|x|} - 1$. Wähle nun N_ε so, dass $\frac{1}{N_\varepsilon} < y \cdot \varepsilon$
Dann gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$:

$$|a_n - 0| = |x^n| = |x|^n = \frac{1}{(1+y)^n} \leq \frac{1}{1+ny} < \frac{1}{ny} < \frac{1}{n}\varepsilon N_\varepsilon < \varepsilon$$

Bernoulli-Ungleichung: $(1+y)^n \geq 1 + ny$

2.5 Grenzwertsätze:



Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$:

a) $a_n + b_n \to a + b$

$a_n - b_n \to a - b$

b) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

c) $|a_n| \to |a|$

d) Ist zudem $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und die Folge $(a_n/b_n)_{n \geq n_0}$ ist konvergent mit $a_n/b_n \to a/b$

2.6 Einschachtelungssatz:

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$ und sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$, so gilt auch $\lim\limits_{c \to \infty} c_n = a$.

2.7 Beispiele:

a) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$: $\underbrace{a_n = 0}_{\text{konstante Folge}} \leq c_n = \frac{1}{n^2} \leq \underbrace{\frac{1}{n} = b_n}_{\text{harmonische Folge}}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

b) $\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$: $\underbrace{a_n = 0}_{\text{konstante Folge}} \leq c_n = \frac{1}{n^2+n+1} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2} = b_n}_{\text{Nullfolge a)}}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2+n+1} = 0$$

c) $$\frac{3n^2+1}{4n^2+2n+1} = \frac{3n^2}{4n^2+2n+1} + \frac{1}{4n^2+3n+1}$$

$$\to \frac{3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \to \frac{3}{4+0+0} = \frac{3}{4}$$