Kapitel 3: Reihen

Oft ist man daran interessiert, alle Glieder einer Folge zu summieren. Das führt dann zu einer unendlichen Summe, die man auch als Reihe bezeichnet. Aber Vorsicht ist angesagt, da eine solche unendliche Summe nicht unbedingt existieren muss. Beispielsweise führt eine konstante Folge, mit einem von Null verschiedenen Wert, durch Aufsummieren zu einer divergenten Reihe.

3.1 Definition:

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

eine Partialsumme, die natürlich existiert, da sie endlich ist. Konvergiert die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen, dann ist der Grenzwert

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

der Wert der Reihe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

3.2 Geometrische Reihe:

Wir betrachten die geometrische Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k, \quad |x| < 1$$

sie läßt sich wie folgt explizit ausrechnen

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} \\ x \cdot S_n &=& \phantom{1 + {}} x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n \\ \hline (1-x) S_n &=& 1 - x^n \end{array} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Da $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ für $|x| < 1$ als geometrische Folge eine Nullfolge ist, konvergiert die Folge S_n der geometrischen Partialsummen zur geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \lim_{n \to \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Beispiel: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

3.3 Harmonische Reihe:

Auch die harmonische Folge $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Wir betrachten daher nun die harmonische Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

und zeigen, dass ihre Folge divergiert. Hierzu betrachten wir die harmonische Partialsumme S_n mit $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}_0$:

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}}_{= 1/2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ Summanden}}$$

Die harmonische Partialsumme lässt sich nun wie folgt nach unten abschätzen:

$$S_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ Summanden}} = 1 + m \cdot \frac{1}{2}$$

Damit wird S_n für wachsendes m beliebig groß und die Folge harmonischer Partialsummen divergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \text{divergent}$$

3.4 Wichtige Beispiele konvergenter Reihen:

Für eine beliebige Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt mit $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \ldots$$

Man kann also den Grenzwert der Reihen als Definition von Funktionen verwenden.