Kapitel 4: Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Funktionen sind für den Naturwissenschaftler von grundlegender Bedeutung. Hier wollen wir uns auf "brave" Funktionen beschränken, die stetig sind. Dies bedeutet anschaulich, dass diese Funktionen keine Sprünge machen. Man kann den Graphen der Funktion also zeichnen, ohne den Stift absetzen zu müssen.

4.1 Definition:

Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element x aus dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ genau ein Element $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet:

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

Das Bild von f bezeichnet die Menge

$$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in D \}$$

Umgekehrt wird das Urbild einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ definiert durch

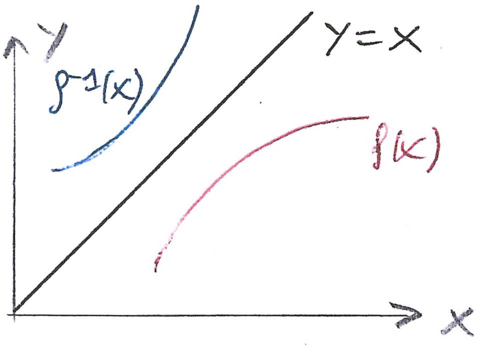
$$f^{-1}(B) = \{ x \in D \mid f(x) \in B \}$$

Eine Funktion $g: S \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Umkehrfunktion der Funktion $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$g(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(g(y)) = y$$

für alle $x \in D$ und $y \in S$ gilt. Wir schreiben: $f^{-1} = g$

Anschaulich erhält man die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, indem man die Funktion $f(x)$ an der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ spiegelt.



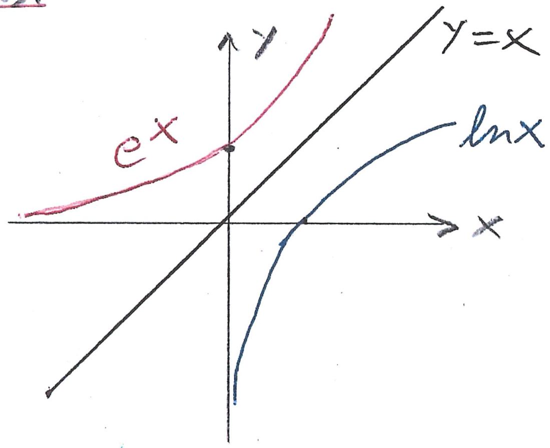
4.2 Exponentialfunktion, Logarithmus:

- Wichtige Rechenregel für Exponentialfunktion:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

- Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\ln x$ nur für $x > 0$ definiert:

$$\ln e^x = x, \quad e^{\ln x} = x$$



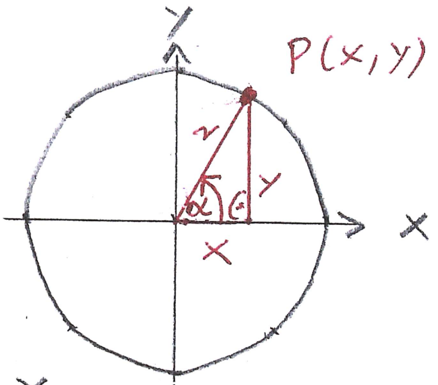
- Wichtige Rechenregeln für Logarithmus:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

4.3 Trigonometrische Funktionen:

Wir führen die trigonometrischen Funktionen an einem rechtwinkligen Dreieck ein, wobei ein Punkt auf einem Kreis mit Radius r liegt:



Satz von Pythagoras: $x^2 + y^2 = r^2$

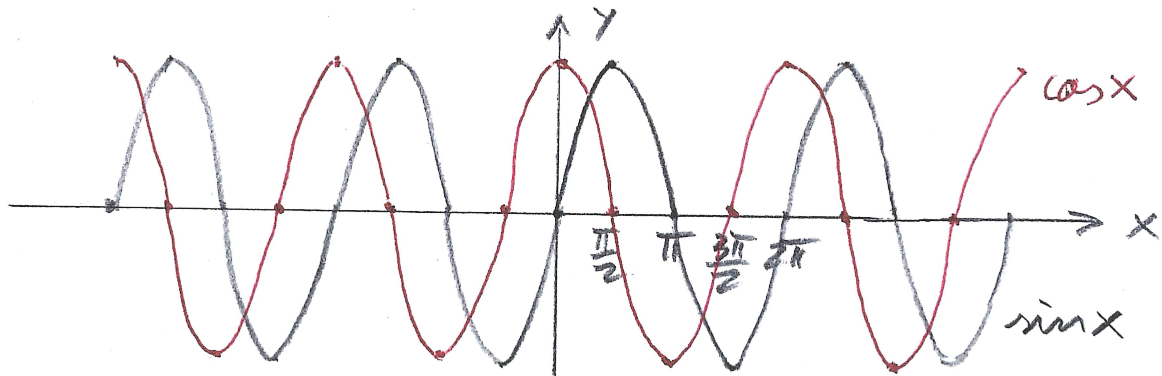
Sinus: $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{y}{r}$

Kosinus: $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{x}{r}$

Die trigonometrischen Funktionen haben die folgenden speziellen Werte:

α im Gradmaß	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Hieraus ergeben sich die folgenden Graphen der trigonometrischen Funktionen:



Wichtige Eigenschaften trigonometrischen Funktionen:

- sin ist ungerade: $\sin(-x) = -\sin x$
- cos ist gerade: $\cos(-x) = \cos x$

- Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Trigonometrische Additionstheoreme:

  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$
- Anwendung 1: $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$

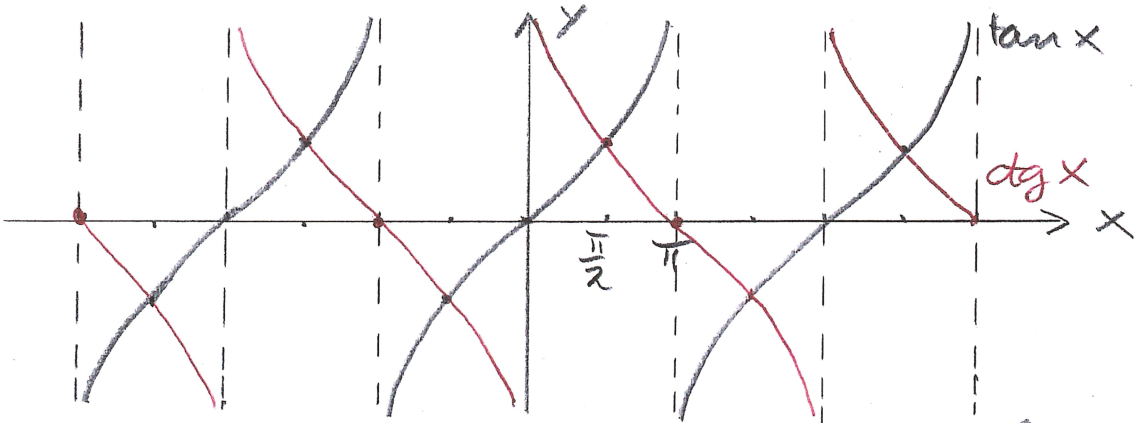
  Verschiebt man die Sinus-Funktion um $-90°$, so erhält man die Kosinus-Funktion.
- Anwendung 2:

  $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

  $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

  $\Rightarrow \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
- Weitere trigonometrische Funktionen:

  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$



- Die entsprechenden Umkehrfunktionen lauten: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arcctg}\, x$

4.4 Grenzwerte von Funktionen:

Wir wollen nun die Fragestellung untersuchen, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ verhalten, wenn sich das Argument x einem fest vorgegebenen Wert a im Definitionsbereich D annähert. Hierbei kann der Definitionsbereich D wie folgt vorliegen:

- offen, z.B. (a,b)
- halboffen, z.B. $(a,b]$
- abgeschlossen, z.B. $[a,b]$

Wir bezeichnen mit $\overline{D}$ den Abschluss von D. Es sei nun $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \overline{D}$. Wir nennen $y \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert der Funktion f in a, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $a_n \neq a$ und $a_n \to a$ auch $f(a_n) \to y$ gilt. Hierbei verwenden wir die Schreibweise

$$y = \lim_{x\to a} f(x)$$

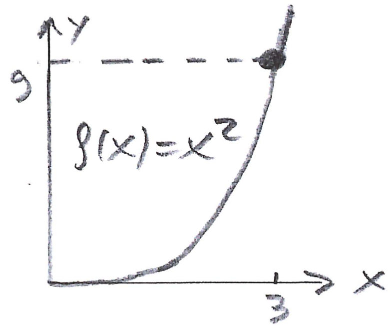
Beachte, dass auch $y = \pm\infty$ als uneigentliche Grenzwerte erlaubt sind.

4.5 Beispiele:

a) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $x = 3$. Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to 3$ gilt:

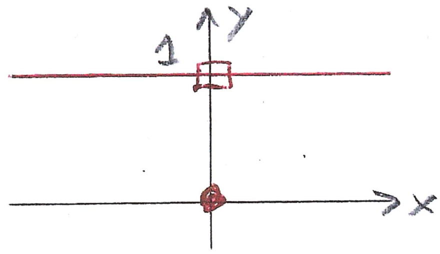
$f(a_n) = a_n^2 \longrightarrow 3^2 = 9$

Ergebnis: $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$



b) Es sei nun $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der abschnittsweisen Definition

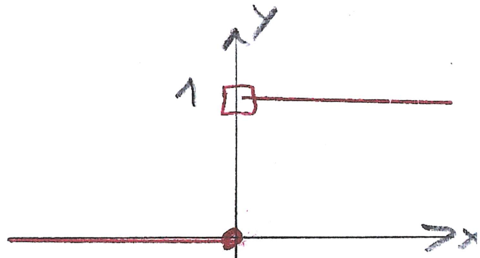
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



und $a = 0$. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, also $a_n \to 0$, mit $a_n \neq 0$. Dann gilt $f(a_n) = 1 \to 1$ und damit $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Daher gilt hier $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0 = f(0)$.

c) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der abschnittsweisen Definition

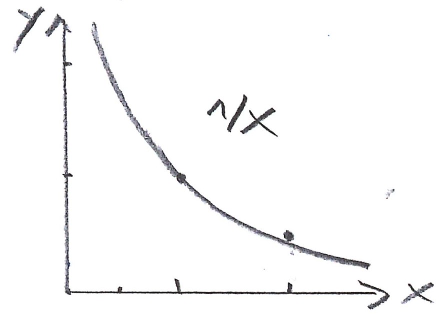
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



und $a = 0$. Für die Nullfolge $a_n = -\frac{1}{n} \to 0$ gilt dann $f(a_n) = 0 \to 0$, während für die Nullfolge $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ gilt $f(a_n) = 1 \to 1 \neq 0$. Daher existiert kein eindeutiger Grenzwert von $f(x)$ im Punkte $a = 0$.

d) Es sei $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann folgt aus dem nebenstehenden Graphen unmittelbar:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$



4.6 Definition:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x \in D$, wenn gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f heißt stetig auf D, wenn sie in jedem Punkt in D stetig ist.

4.7 Beispiele:

a) Jede Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ist stetig.

b) Jede rationale Funktion

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

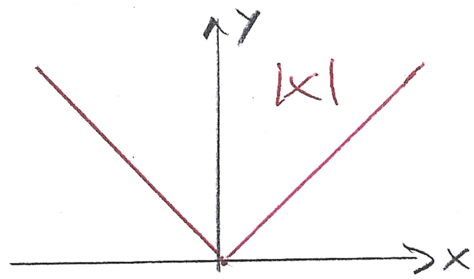
ist stetig, wobei f, g Polynomfunktionen sind.

c) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig, da $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$ ist.

d) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist stetig. Betrachte $x = 0$, ist $f(x)$ auch dort stetig? Ja, denn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \to 0$ gilt aufgrund der Grenzwertsätze für Folgen, siehe Abschnitt 2.5, auch $|a_n| \to |0| = 0$. Ergebnis: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$



e) Die Exponentialfunktion, der Sinus und der Kosinus sind stetig. Allgemein sind alle Funktionen stetig, die wie diese – siehe Abschnitt 3.4 – durch Reihen definiert werden.

4.8 Zwischenwertsatz:

Eine stetige Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.