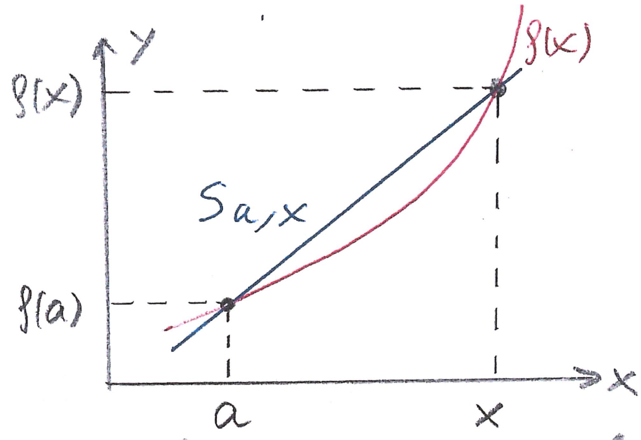
Kapitel 5: Differenzierbarkeit und Ableitungen von Funktionen

Von ganz besonderer Bedeutung in der Physik sind die Ableitungen einer Funktion. Das wird schon deutlich bei einem so elementaren Begriff wie die Geschwindigkeit.

5.1 Sekante:



Wir betrachten die Sekante $S_{a,x}$ von f durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Sie besitzt als Steigung den Differenzenquotienten

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} : D\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$$

Diese Steigung ist ein Maß für das Wachstum der Funktionswerte von f auf dem Weg von a nach x.

5.2 Definition:

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion f heißt stetig differenzierbar in a, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to a} \varphi_a(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir den Grenzwert die Ableitung von f an der Stelle a:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Wir nennen die Funktion f differenzierbar auf D, wenn sie in jedem Punkt von D differenzierbar ist.

5.3 Beispiele:

a) Es sei $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Sekantensteigung lautet dann

$$\varphi_a(x) = \frac{x^n - a^n}{x-a}$$

Wie berechnet man von ihr den Grenzwert $x \to a$? Hierzu lässt sich die Polynomdivision anwenden, bei der man das Polynom $x^n - a^n$ explizit durch das Polynom $x - a$ dividiert:

$$(x^n-a^n):(x-a)=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^n-ax^{n-1}} \\
\quad ax^{n-1}-a^n \\
\quad \underline{ax^{n-1}-a^2x^{n-2}} \\
\qquad a^2x^{n-2}-a^n \\
\qquad \underline{a^2x^{n-2}-a^3x^{n-3}} \\
\qquad\quad a^3x^{n-3}-a^n \\
\qquad\quad \vdots \\
\qquad\quad a^{n-1}x-a^n \\
\qquad\quad \underline{a^{n-1}x-a^n} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Probe:

$$(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1})\cdot(x-a)$$

$$=x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\ldots+a^{n-1}x$$

$$\quad -ax^{n-1}-a^2x^{n-2}-\ldots-a^{n-1}x-a^n$$

$$=x^n-a^n$$

Für die Ableitung von f an der Stelle a ergibt sich damit

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1})=na^{n-1}$$

b) $f(x)=\sqrt{x}$, $a>0$

$$\varphi_a(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

c) Verallgemeinerung von a) und b)

$$f(x)=x^\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$$

d) $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (Polynom)

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1} \underset{\underline{\underline{l=k-1}}}{=} \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)a_{l+1}x^l$$

5.4 Wichtige Ableitungen:

Wir fassen nun die Ableitungen wichtiger Funktionen tabellarisch zusammen. Im Anschluß daran diskutieren wir Rechenregeln, wie sich diese Ableitungen berechnen lassen.

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beispielsweise ergibt sich die Ableitung der Exponentialfunktion über deren Darstellung als Reihe, siehe Abschnitt 3.4:

$$(e^x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$\underset{\overline{\overline{m=n-1}}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = e^x$$

Analog geht man bei der Ableitung von $\cos x$ und $\sin x$ vor.

5.5 Rechenregeln:

Es seien $f: D_f \to \mathbb{R}$ und $g: D_g \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Summenregel: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

b) Faktorregel: $(c f)'(a) = c\, f'(a)$, $c \in \mathbb{R}$

c) Produktregel: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

d) Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

für $g(a) \neq 0$

e) Kettenregel: $f(g(a))' = f'(g(a))\, g'(a)$

Wir wenden diese Rechenregeln nun bei einigen Beispielen an.

5.6 Beispiele:

a) $f(x) = 3\tan x + x^3 = 3\,\frac{\sin x}{\cos x} + x^3$

Man muß hier Summen-, Faktor- und Quotientenregel anwenden:

$$f'(x) = 3\,\frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} + 3x^2$$

$$= 3\,\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} + 3x^2 = 3\,\frac{1}{\cos^2 x} + 3x^2$$

Hier wurde der trigonometrische Pythagoras angewandt: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$

Man muß hier die Kettenregel anwenden:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

5.7 Ableitung der Umkehrfunktion:

Es sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $f^{-1}: \operatorname{Im} f \longrightarrow D$ deren Umkehrfunktion. Dann gilt nach Abschnitt 4.1

$$f^{-1}(f(a)) = a, \quad a \in D$$

Die Differentiation der beiden Seiten ergibt mit Hilfe der Kettenregel:

$$(f^{-1})'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Hierbei wurde $b = f(a)$ bzw. $a = f^{-1}(b)$ verwendet.

5.8 Beispiele:

a)
$$\begin{tikzcd}
y = f(x) = e^x \arrow[r] \arrow[d] & x = f^{-1}(y) = \ln y \arrow[d] \\
f'(x) = e^x \arrow[r] & (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}
\end{tikzcd}$$

b) $y = f(x) = \tan x \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \arctan y$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} \Longrightarrow \cos^2 y\,(1+\tan^2 y) = 1 \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

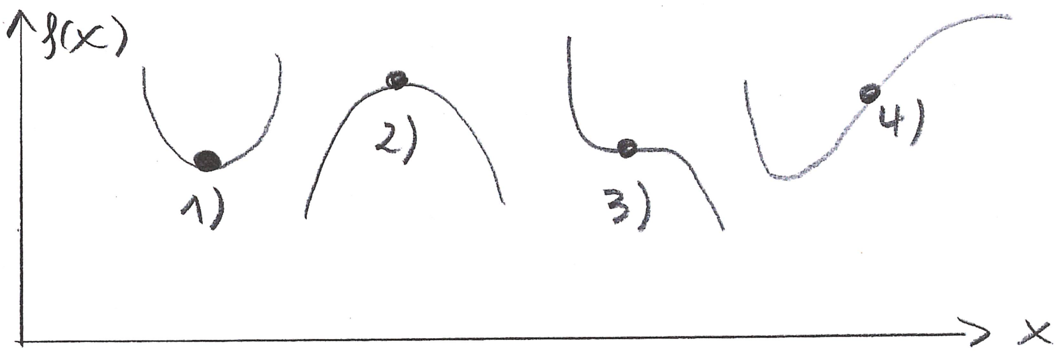
5.9 Höhere Ableitungen:

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall D differenzierbar. Ist die Funktion f' in $a \in D$ selbst differenzierbar, so bezeichnen wir ihre Ableitung an der Stelle a mit $f''(a)$. Existiert $f''(x)$ für jedes $x \in D$, so wird die Funktion $f''(x)$ als zweite Ableitung von f auf D bezeichnet. Im allgemeinen Fall wird die n-te Ableitung mit $f^{(n)}(x)$ bezeichnet.

5.10 Kritische Punkte und Extremwerte:

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ hat die Bedeutung der Steigung der Tangente im Punkt x. Ein kritischer Punkt einer Funktion ist ein Punkt mit horizontaler Tangente:

$$f'(x_0) = 0 \iff x_0 \text{ ist kritischer Punkt.}$$



Kritische Punkte lassen sich wie folgt klassifizieren:

1) $f''(x_0) > 0$: Minimum
2) $f''(x_0) < 0$: Maximum

} Extremwerte

3) $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$: Sattelpunkt

Darüber hinaus ist für eine Kurvendiskussion noch wichtig:

4) $f'(x_0) \neq 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$: Wendepunkt