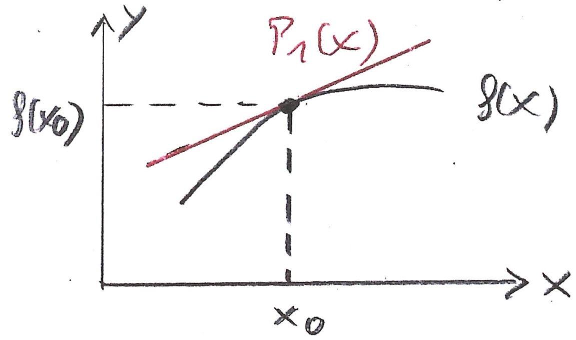
Kapitel 6: Taylor - Reihe

Sehr oft möchte man den Wert einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle x gar nicht ganz genau wissen sondern ist schon mit einer ungefähren Angabe zufrieden. Wenn diese Funktion mehrfach stetig differenzierbar ist, dann kann man mit wenig Aufwand systematisch immer bessere Näherungen erzielen. Dazu bedient man sich der sogenannten Taylor-Reihe.

6.1 Tangente:

Ist $f(x)$ stetig differenzierbar, so ist die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkte $(x_0, f(x_0))$ durch das folgende Polynom erster Ordnung gegeben



$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Approximation der Funktion f lokal in x_0. Im folgenden zeigen wir, wie man durch Hinzunahme weiterer Ableitungen von f an der Stelle x_0 die Funktion f noch besser in der Umgebung um x_0 annähern kann.

6.2 Herleitung:

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ n-fach stetig differenzierbar, d.h. daß auch noch die $n$te Ableitung stetig ist. Wir nähern nun f durch ein Polynom $n$ter Ordnung an:

$$f(x) \approx P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$. Wir berechnen die jeweiligen Ableitungen

$$f'(x) \approx P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) \approx P_n''(x) = 2a_2 + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) \approx P_n^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot a_n$$

und fordern, dass das Polynom $P_n(x)$ die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ bestmöglichst annähert

Daher setzen wir nun $x = x_0$:

$f(x_0) \approx P_n(x_0) = a_0$ $\qquad$ $f''(x_0) \approx P_n''(x_0) = 2a_2$

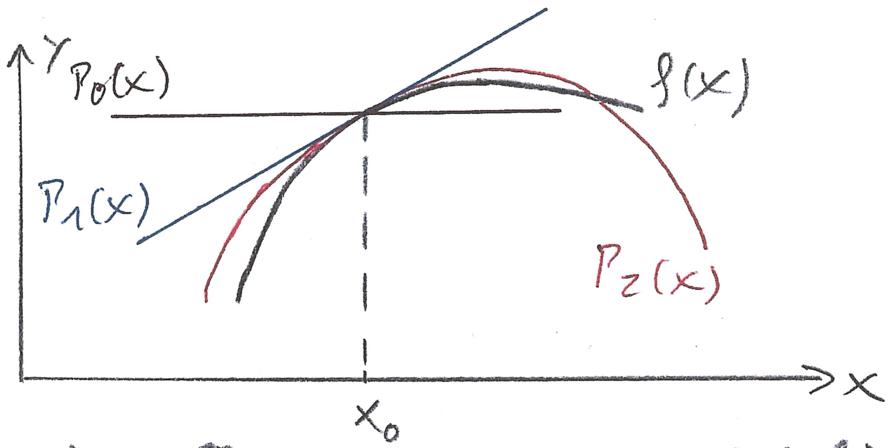
$\vdots$

$f'(x_0) \approx P_n'(x_0) = a_1$ $\qquad$ $f^{(n)}(x_0) \approx P_n^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$

Demnach lautet das gesuchte Polynom

$$f(x) \approx P_n(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Je größer n wird, umso genauer approximiert das Polynom $P_n(x)$ die Funktion $f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$:



Bildet man den Limes $n \to \infty$, so folgt hieraus die Taylor-Reihe von f mit dem Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Man beachte, dass die Taylor-Reihe nicht immer konvergiert. Und falls die Taylor-Reihe von f konvergiert, dann konvergiert sie nicht notwendig gegen f.

6.3 Exponentialfunktion:

Für die Exponentialfunktion $f(x)$ und den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ erhalten wir

$f(x) = e^x$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$ $\qquad$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$ $\qquad$ $f''(0) = 1$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x$ $\qquad$ $f^{(n)}(0) = 1$

Die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion lautet dann

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

sie wurde schon in Abschnitt 3.4 eingeführt. Entsprechend lässt sich zeigen, dass die in Abschnitt 3.4 genannten Reihen für sin x, cos x deren Taylor-Reihen sind.

6.4 Geometrische Reihe:

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ und den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad f''(0) = 2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0) = n!$$

Demnach erhalten wir für die Taylor-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Es handelt sich hierbei um die geometrische Reihe, die in Abschnitt 3.2 behandelt wurde.

6.5 Regel von de l'Hospital:

Manchmal hat man mit Funktionen von der Form

$$\frac{\sin x}{x}$$

zu tun. Die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, da sowohl der Zähler als auch der Nenner im Limes $x \to 0$ verschwindet und unklar ist, welchen Wert man dem resultierenden Ausdruck "$\frac{0}{0}$" zuweisen soll. Falls es möglich sein sollte, möchte man daher diese Funktion an der Stelle $x = 0$ durch den Wert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

stetig ergänzen. Hierzu kann man die Regel von de l'Hospital verwenden:

Die Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: D \to \mathbb{R}$ seien auf demselben Bereich D definiert und es gelte $f(a)=g(a)=0$ für $a \in D$. Wenn beide Funktionen im Punkt $a \in D$ differenzierbar sind mit $g'(a)\neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

falls der letzte Grenzwert existiert.

Zum Beweis der Regel von de l'Hospital kann man die Taylor-Reihen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ verwenden, falls diese existieren:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\dots}{g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2+\dots}$$

$$\underline{\underline{f(a)=g(a)=0}}\quad\lim_{x\to a}\frac{f'(a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)+\dots}{g'(a)+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)+\dots}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Aus diesem Beweis der Regel von de l'Hospital mit den Taylor-Reihen geht hervor, dass auch die folgende Verallgemeinerung gilt:

Es seien $f: D\to\mathbb{R}$ und $g: D\to\mathbb{R}$ auf D definierte Funktionen mit der Eigenschaft

$$f(a)=g(a)=0$$
$$f'(a)=g'(a)=0$$
$$\vdots$$
$$f^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(a)=0$$

Wenn beide Funktionen im Punkt $a\in D$ n-fach stetig differenzierbar sind und $g^{(n)}(a)\neq 0$ ist, dann gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

falls der letzte Grenzwert existiert.

Für das oben genannte Beispiel gilt also $f(x)=\sin x$ und $g(x)=x$ mit $f'(x)=\cos x$ und $g'(x)=1$. Mit $f(0)=g(0)=0$ und $g'(0)=1\neq 0$ sind die Voraussetzungen für die Regel von de l'Hospital erfüllt und es folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

Ein Beispiel für die verallgemeinerte Regel von de l'Hospital lautet:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)''}{(x^2)''} = \lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x\cos x)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{2} = 1$$

6.6 Identitätssatz für Potenz-Reihen:

Hat man ein- und dieselbe Funktion in zwei Potenz-Reihen vorliegen, gilt also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x-x_0)^n$$

so folgt hieraus, dass die jeweiligen Entwicklungskoeffizienten übereinstimmen, also

$$\alpha_n = \beta_n \quad \text{für } n\in\mathbb{N}_0$$

6.7 Anwendung für Potenz-Reihen:

Im folgenden Beispiel lernen wir einen natürlichen Zugang zur Taylor-Reihe der Exponentialfunktion kennen. Hierzu betrachten wir ein naives Wachstumsmodell in Form eines Anfangswertproblems, das aus der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = c\,x(t), \quad c\in\mathbb{R}$$

und aus der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0$$

besteht. Zur Lösung des Anfangswertproblems machen wir einen Ansatz in Form einer Potenz-Reihe

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n$$

Für die Ableitung folgt dann

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha_n t^{n-1} \underset{=}{\overset{n'=n-1}{=}} \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1)\,\alpha_{n'+1} t^{n'}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt auf

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c\,\alpha_n t^n$$

Aufgrund des Identitätssatzes für Potenz-Reihen von Abschnitt 6.6 können wir die jeweiligen Entwicklungskoeffizienten auf der linken und der rechten Seite gleichsetzen:

$$(n+1)\,\alpha_{n+1} = c\,\alpha_n, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

Wir erhalten damit für die Entwicklungskoeffizienten die Rekursionsbeziehung

$$\alpha_{n+1} = \frac{c}{n+1} \alpha_n , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

sie läßt sich mit Hilfe der vollständigen Induktion lösen durch

$$\alpha_n = \frac{c^n}{n!} \alpha_0$$

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung von der Form

$$x(t) = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} t^n$$

Den noch unbekannten Koeffizienten α_0 können wir schließlich durch die Anfangsbedingung festlegen:

$$x(0) = \alpha_0 = x_0$$

Damit erhalten wir als Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} = x_0 e^{ct}$$

In der Tat löst dieses Ergebnis die Differentialgleichung und erfüllt die Anfangsbedingung.