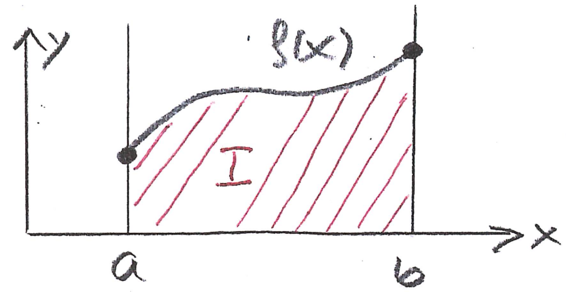
# Kapitel 7: Integralrechnung

Wir werden nun die Integration als Umkehrungsoperation der Differentiation kennenlernen. Es zeigt sich, dass man hierzu vom Flächeninhalt unterhalb einer Funktion auszugehen hat.



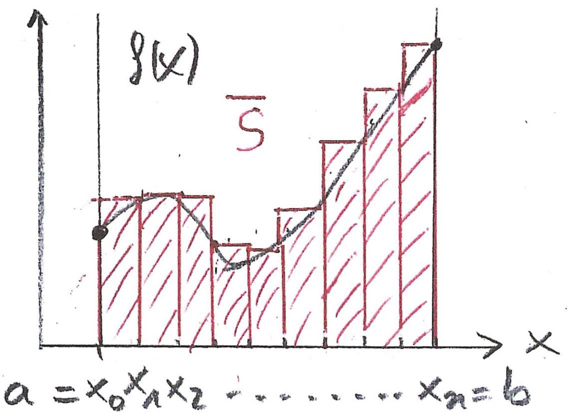

Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Das Ziel besteht nun darin, den Flächeninhalt $I$ zu berechnen, den der Graph von $f$ mit der $x$-Achse einschließt.

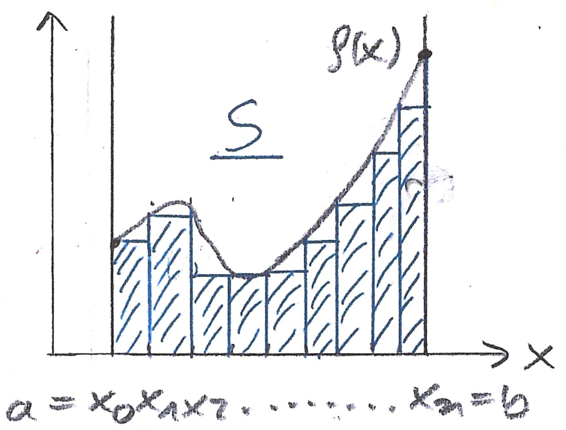
## 7.1 Integrierbarkeit und Integral:

Hierzu zerlegen wir zunächst das Intervall $[a,b]$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $n \geq 1$ eine Zerlegung des Intervalls, falls

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Dann läßt sich der gesuchte Flächeninhalt durch eine Obersumme nach oben und durch eine Untersumme nach unten abschätzen:




Hierzu müssen wir aber zunächst einige Begrifflichkeiten klären. Es sei $M$ eine nichtleere Menge in $\mathbb{R}$, also $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

$S \in \mathbb{R}$ ist obere (untere) Schranke von $M$, falls $x \leq S$ ($x \geq S$) für alle $x \in M$. Beachte hierzu, dass $S$ nicht unbedingt Element der Menge $M$ sein muss. Offenbar ist $S$ nicht eindeutig.

Beispiel: Betrachte das Intervall $[1,2]$. Alle $s \leq 1$ sind eine untere Schranke, während alle $s \geq 2$ eine obere Schranke sind.

Um nun den Begriff einer oberen (unteren) Schranke eindeutig zu machen, führt man ein:

$\sup\{M\}$ = kleinste obere Schranke von $M$ (supremum)

$\inf\{M\}$ = größte untere Schranke von $M$ (infimum)

Beispiel: $\sup\{[1,2]\} = 2$, $\inf\{[1,2]\} = 1$

Mit diesen Begrifflichkeiten läßt sich nun die Obersumme (Untersumme) von $f$ bezüglich einer Zerlegung $Z$ wie folgt definieren:

$$\overline{S}(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\underline{S}(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Der konkrete Wert für diese Obersumme (Untersumme) hängt dann aber noch von der gewählten Zerlegung $Z$ ab. Daher definiert man nun das Oberintegral $\overline{I}(f)$ bzw. das Unterintegral $\underline{I}(f)$ dadurch, dass man eine Zerlegung $Z$ findet, bei der die Obersumme $\overline{S}(f,Z)$ bzw. die Untersumme $\underline{S}(f,Z)$ möglichst klein bzw. größt ist:

$$\overline{I}(f) = \inf\{\overline{S}(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

$$\underline{I}(f) = \sup\{\underline{S}(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

Demnach ist $\overline{I}$ bzw. $\underline{I}$ das Infimum bzw. Supremum aller Obersummen bzw. Untersummen. Und es gilt offenbar

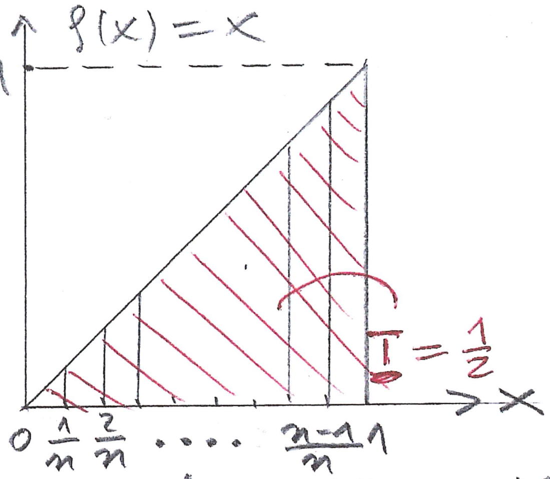
$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$$

Daher definiert man nun das Integral wie folgt. $f$ ist integrierbar auf $[a,b]$, falls

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

Dann heißt $\int_a^b f(x)\,dx = \overline{I}(f) = \underline{I}(f) \in \mathbb{R}$ das Integral von $f$ auf dem Intervall $[a,b]$.

## 7.2 Beispiel:




Es sei $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Wir betrachten nun eine äquidistante Zerlegung von $[0,1]$

$Z_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$

mit $n$ äquidistanten Teilintervallen $[x_{i-1}, x_i] = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ mit $i = 1, \ldots, n$.

Da die Funktion $f(x)$ monoton wachsend ist, gilt

$$\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$$

$$\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i = \frac{i}{n}$$

Demnach erhalten wir für die Untersumme:

$$\underline{S}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1)$$

$$\underset{\text{Summenformel}}{\overset{\text{Gaußsche}}{=}} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{n}{2}(n+1) - n \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Entsprechend ergibt sich die Obersumme zu

$$\overline{S}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\underset{\text{Summenformel}}{\overset{\text{Gaußsche}}{=}} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2}(n+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Es gilt demnach offenbar: $\underline{S}(f, Z_n) \leq \overline{S}(f, Z_n)$

Andererseits gilt aber auch

$$\underline{S}(f, Z_n) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}(f, Z_n)$$

Nun führen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ durch

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, Z_n) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \lim_{n \to \infty} \overline{S}(f, Z_n) = \frac{1}{2}$$

Aufgrund des Einschachtelungssatzes für Folgen von Abschnitt 2.6 folgt dann

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \frac{1}{2}$$

Damit haben wir das folgende Ergebnis erzielt:

$$\int_0^1 x \, dx = \underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \frac{1}{2}$$

## 7.3 Integrationsregeln:

Es seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen sowie $c,d\in\mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $cf+dg$ integrierbar und es gelten

a) Linearität:

$$\int_a^b \{c\,f(x)+d\,g(x)\}\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$$

b) Additivität: $c\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Beispiel:

$$\int_{-3}^{4} |x|\,dx \overset{\text{Additivität}}{=} \int_{-3}^{0}(-x)\,dx + \int_0^4 x\,dx$$

$$\overset{\text{Abschnitt 7.2}}{=} \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = \frac{9}{2}+\frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

c) Richtungsänderung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Beispiel: $\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Ferner bemerken wir, dass stetige Funktionen integrierbar sind.

## 7.4 Stammfunktion:

Es sei $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Ferner sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $F'=f$. Dann heißt $F$ Stammfunktion von $f$.

Beispiel: $f(x)=x^2$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$

Beachte, dass die Integrationskonstante $C$ essentieller Bestandteil der Stammfunktion ist und nicht weggelassen werden darf.

## 7.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig.

a) Es sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $F(y)=\int_a^y f(x)\,dx$. Dann ist $F$ eine Stammfunktion von $f$.

b) Je zwei Stammfunktionen $F_1$ und $F_2$ von $f$ unterscheiden sich nur um eine Konstante.

c) Ist $F$ Stammfunktion von $f$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

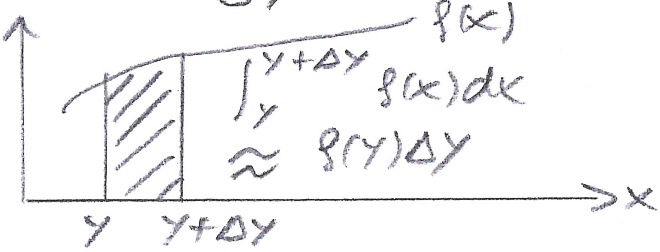
## 7.5.1 Beweis von a):

Gemäß der Definition einer Stammfunktion im Abschnitt 7.4 ist zu zeigen, dass $F'(y) = f(y)$ gilt. Es stellt sich daher die Frage, wie man die Ableitung $F'(y)$ berechnet. Hierzu benutzen wir die Definition der Ableitung

$$F'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int_0^{y+\Delta y} f(x)\,dx - \int_0^y f(x)\,dx}{\Delta y}$$

<u>Additivität</u> $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_y^{y+\Delta y} f(x)\,dx$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y} f(y)\Delta y = f(y)$$




## 7.5.2 Beweis von b):

Wenn $F_1$ und $F_2$ Stammfunktionen von $f$ sind, so gilt

$$F_1' = f, \quad F_2' = f$$

Demnach folgt dann für die Differenz $F_1-F_2$ die Eigenschaft

$$(F_1-F_2)' = F_1'-F_2' = f-f = 0$$

Die Ableitung $(F_1-F_2)'(x)$ verschwindet für alle $x\in[a,b]$. Demnach muss gelten:

$$(F_1-F_2)(x) = \text{const.}$$

## 7.5.3 Beweis von c):

Aus a) wissen wir, dass $F_1(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ eine Stammfunktion von $f$ ist. Aus b) folgt, dass jede beliebige Stammfunktion zu $f$ gegeben ist durch

$$F_2(y) = \int_a^y f(x)\,dx + C$$

Werten wir $F_2(y)$ für $y=a$ und für $y=b$ aus

$$F_2(a) = C, \quad F_2(b) = \int_a^b f(x)\,dx + C$$

dann folgt: $F_2(b)-F_2(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

### 7.5.4 Bezeichnungen:

a) $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Stammfunktion von $f$:

$$\left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

b) $\int^y f(x)\,dx$ heißt unbestimmtes Integral

$\int_a^b f(x)\,dx$ heißt bestimmtes Integral

### 7.6 Wichtige Stammfunktionen:

| Funktion $f(x)$ | Stammfunktion $F(x) = \int^x f(y)\,dy$ |
| --- | --- |
| $x^\alpha$ | $\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $\frac{1}{x^2+1}$ | $\arctan x + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x + C$ |

Im folgenden werden nützliche Integrationsmethoden diskutiert.

### 7.7 Partialbruchzerlegung:

Oft trifft man auf Integrale über den Quotienten von Polynomen. Dann kann man sich mit einer Partialbruchzerlegung weiterhelfen. Der Einfachheit halber erläutern wir diese Methode beispielhaft anhand des unbestimmten Integrals

$$\int^y \frac{7x+1}{x^2-x-2}\,dx$$

Hierzu zerlegen wir den Quotienten in eine Summe einfacher Brüche

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$$

die man auch als Partialbrüche bezeichnet. Bildet man auf der rechten Seite den Hauptnenner, so müssen offenbar die Zahlen $a, b, c, \dots$ mit den Nullstellen des Nennerpolynoms übereinstimmen. In unserem Beispiel gibt es wegen $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ die beiden Nullstellen $a=2$ und $b=-1$:

$$\frac{7x+1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Bringen wir die beiden Partialbrüche auf den Hauptnenner, so folgt

$$7x+1 = A(x+1)+B(x-2) = (A+B)x + A-2B$$

durch Koeffizientenvergleich folgen die beiden Gleichungen

$$A+B=7$$
$$A-2B=1$$

die die eindeutige Lösung $A=5$ und $B=2$ besitzen.
Es folgt daher:

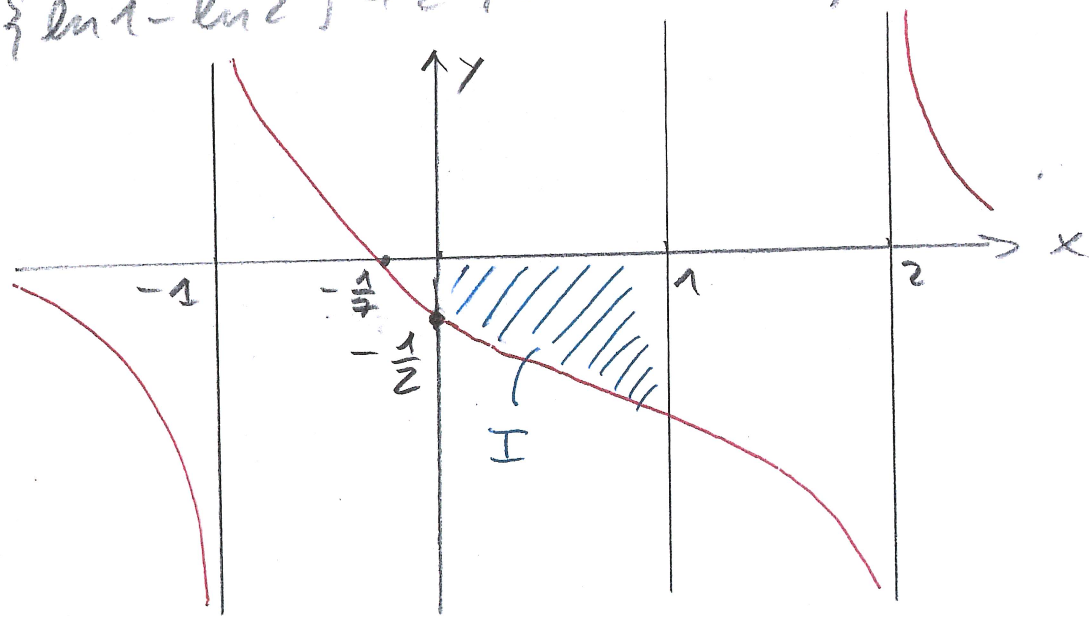
$$\int^y \frac{7x+1}{x^2-x-2}\,dx = 5\int^y \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int^y \frac{1}{x+1}\,dx$$

Die einzelnen Partialbrüche lassen sich problemlos integrieren und führen auf die Stammfunktion

$$\int^y \frac{7x+1}{x^2-x-2}\,dx = 5\ln|y-2| + 2\ln|y+1| + C$$

Zur Illustration berechnen wir noch konkret das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{7x+1}{x^2-x-2}\,dx = \Big[5\ln|y-2| + 2\ln|y+1|\Big]_0^1$$
$$= 5\{\ln 1 - \ln 2\} + 2\{\ln 2 - \ln 1\} = -3\ln 2 = I$$



## 7.8 Partielle Integration:

Es seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Es handelt sich hierbei um die Umkehrung der Produktregel der Differentiation:

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

## 7.9 Beispiele:

a) $I = \int_0^\pi x\cos x\,dx$

$u(x) = x \qquad v'(x) = \cos x$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = \sin x$

$$I = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = [x\sin x + \cos x]_0^\pi$$

$$= -1 - 1 = -2$$

b) $I = \int^x y^2 \ln y\,dy$

$u(y) = \ln y \qquad v'(y) = y^2$

$u'(y) = \frac{1}{y} \qquad v(y) = \frac{1}{3}y^3$

$$I = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int^x \frac{1}{3}y^2\,dy = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

## 7.10 Substitutionsregel:

Es seien $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\mathrm{Im}(g) \subseteq D$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x))dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, g^{-1)}(y)\,dy$$

Es handelt sich hierbei um die Umkehrung der Kettenregel der Differentiation. Differenzieren wir die rechte Seite nach b, so folgt aufgrund der Kettenregel der Differentiation und Abschnitt 5.7:

$$\left(\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, g^{-1)}(y)\,dy\right)^{)b} = f(g(b))\, g^{-1)}(g(b))\, g'(b) = f(g(b))$$

## 7.11 Beispiele:

a) $I = \int_0^2 x\, e^{x^2}\, dx$

$f(y) = e^y\,;\ g(x) = x^2,\quad g'(x) = 2x$

$I = \int_0^2 \frac{g'(x)}{2}\, e^{g(x)}\, dx = \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(2)} e^y\, dy$

$= \frac{1}{2}\int_0^4 e^y\, dy = \frac{1}{2}\left[e^y\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)$

b) $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$

$y(x) = 1 - x^2,\ y(0) = 1,\ y(1) = 0,\ x(y) = \sqrt{1-y}$

$dy = y'(x)\, dx = -2x\, dx = -2\sqrt{1-y}\, dx$

$I = \int_1^0 \sqrt{1-y}\,\sqrt{y}\,\frac{-1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-y}}\, dy$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\, y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

c) $I(z) = \int^z x\sqrt{1-x^2}\, dx$

$= \int^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-y}\,\sqrt{y}\,\frac{-1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-y}}\, dy = -\frac{1}{2}\int^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{y}\, dy$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\left(1 - z^2\right)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\left(1 - z^2\right)^{3/2} + C$