Kapitel 8: Komplexe Zahlen

Um alle quadratischen Gleichungen lösen zu können, muss man die reellen auf die komplexen Zahlen erweitern.

8.1 Definition komplexer Zahlen:

Die Einführung komplexer Zahlen läßt sich durch die Beobachtung motivieren, dass manche quadratischen Gleichungen keine reellen Lösungen besitzen. Wir betrachten als Beispiel die quadratische Gleichung

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \qquad (8.1)$$

die auf folgende Lösung führt

$$x_\pm = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3\sqrt{-1} \qquad (8.2)$$

Die beiden Ausdrücke (8.2) sind offenbar keine reellen Zahlen, sie werden aber trotzdem als gewisse mathematische Objekte akzeptiert. Hierzu kürzt man $\sqrt{-1}$ durch die imaginäre Einheit i ab und betrachtet die Menge $\mathbb{C}$ aller Ausdrücke der Form

$$z = x \pm iy; \quad x, y \in \mathbb{R} \qquad (8.3)$$

Diese Ausdrücke werden zu komplexen Zahlen, indem man verabredet, dass die in Abschnitt 1.2.1 eingeführten Körper-Axiome in $\mathbb{R}$ auch in $\mathbb{C}$ gelten sollen und dass zusätzlich

$$i^2 = -1 \qquad (8.4)$$

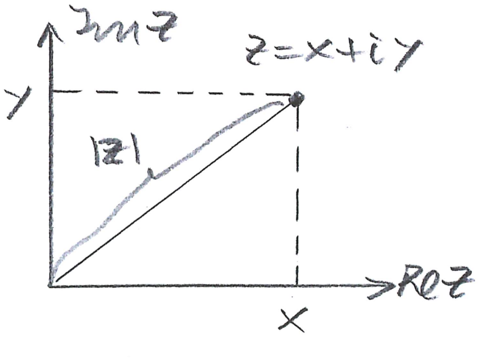
gilt. Man kann zeigen, dass diese Verabredungen zu keinen Widersprüchen führen.

Man bezeichnet $x = Re(z)$ als Realteil von z und $y = Im(z)$ als Imaginärteil von z. Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sie in Real- und in Imaginärteil übereinstimmen:

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2 \qquad (8.5)$$

Eine komplexe Gleichung umfaßt damit zwei reelle Gleichungen.

Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wird als ein Punkt in der Gaußschen x,y-Zahlenebene dargestellt. Dabei bezeichnet man die x-Achse als reelle Achse und die y-Achse als imaginäre Achse.



Den Abstand von z vom Ursprung bezeichnet man als den Betrag $|z|$ von z. Offenbar gilt aufgrund des Satzes von Pythagoras

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (8.6)$$

Beispielsweise erhalten wir für $z = 2+i$ den Betrag $|z| = \sqrt{5}$.

8.2 Rechnen mit komplexen Zahlen:

Wir zeigen nun, wie man die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf komplexe Zahlen anwendet.

8.2.1 Addition und Subtraktion:

Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ zwei komplexe Zahlen. Aus den Gesetzen der Arithmetik folgt dann

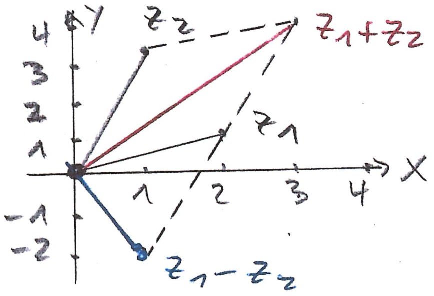
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \qquad (8.7)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \qquad (8.8)$$

Beispielsweise erhalten wir für $z_1 = 2+i$ und $z_2 = 1+3i$:

$$z_1 + z_2 = (2+i) + (1+3i) = 3+4i, \quad z_1 - z_2 = (2+i) - (1+3i) = 1-2i$$

Die Addition bzw. Subtraktion komplexer Zahlen läßt sich in der Gaußschen xy-Zahlenebene dadurch verdeutlichen, dass sie sich wie zweidimensionale Vektoren komponentenweise addieren bzw. subtrahieren.



8.2.2 Multiplikation:

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ lassen sich auch multiplizieren, wenn man das Distributivgesetz und die Verabredung (8.4) beachtet:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) \qquad (8.9)$$

In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir

$$z_1 \cdot z_2 = (2+i)(1+3i) = 2 + i + 6i + 3i^2 = -1 + 7i$$

Wir untersuchen noch das Betragsquadrat von (8.9)

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_2 y_1 + x_1 y_2)^2$$

$$= x_1^2 x_2^2 - \cancel{2x_1 x_2 y_1 y_2} + y_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + \cancel{2x_1 x_2 y_1 y_2} + x_1^2 y_2^2$$

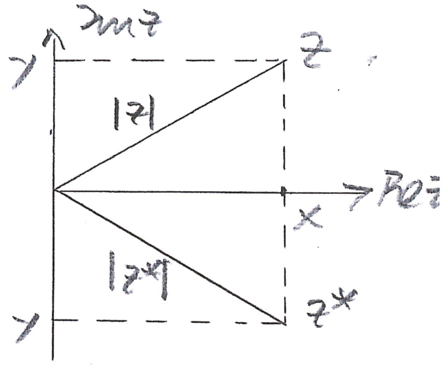
$$= x_1^2 (x_2^2 + y_2^2) + y_1^2 (x_2^2 + y_2^2) = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \qquad (8.10)$$

$$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Für unser Zahlenbeispiel heißt dies:

$$|(2+i)(1+3i)| = |2+i|\cdot|1+3i| = \sqrt{5}\cdot\sqrt{10} = 5\sqrt{2}$$

8.2.3 Konjugiert komplexe Zahl:



Zu jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ läßt sich eine konjugiert komplexe Zahl

$$z^* = x - iy \qquad (8.11)$$

einführen. In der Gaußschen xy-Zahlenebene entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse. Wir folgern hieraus:

a) Addition und Subtraktion von z und z^* führen auf den Real- und den Imaginärteil:

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*) \qquad (8.12)$$

$$y = \frac{1}{2i}(z - z^*) \qquad (8.13)$$

b) Durch Multiplikation von z und z^* folgt der Betrag von z bzw. z^*:

$$z\cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^*|^2 \qquad (8.14)$$

8.2.4 Division:

Wir berechnen den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ zweier komplexer Zahlen z_1 und $z_2 \neq 0$, indem wir mit z_2^* erweitern:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} \overset{(8.14)}{=} \frac{1}{|z_2|^2}\, z_1 z_2^* \qquad (8.15)$$

Nun ist der Nenner reell, so dass die komplexe Division auf eine komplexe Multiplikation zurückgeführt ist. Das Zahlenbeispiel lautet hier:

$$\frac{2+i}{1+3i} = \frac{(2+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1}{10}(2+i-6i+3) = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2}(1-i)$$

Für den Betrag von (8.15) folgt:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|^2}\,|z_1 z_2^*| \overset{(8.10)}{=} \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (8.16)$$

8.2.5 Folgerungen:

Bei der komplexen Konjugation von zusammengesetzten Ausdrücken braucht man nur jede einzelne komplexe Zahl durch ihre konjugiert komplexe Zahl zu ersetzen:

a) $(z_1+z_2)^* \overset{(8.7)}{=} [(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]^* \overset{(8.11)}{=} (x_1+x_2)-i(y_1+y_2)$

$\overset{(8.11)}{=} (x_1+iy_1)^* + (x_2+iy_2)^* = z_1^* + z_2^*$ (8.17)

b) $z_1^* = [(z_1-z_2)+z_2]^* \overset{(8.17)}{=} (z_1-z_2)^* + z_2^*$

$\Rightarrow (z_1-z_2)^* = z_1^* - z_2^*$ (8.18)

c) $(z_1\cdot z_2)^* \overset{(8.9),(8.11)}{=} (x_1x_2-y_1y_2)-i(x_2y_1+x_1y_2) \overset{(8.9),(8.11)}{=} z_1^* z_2^*$ (8.19)

d) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* \overset{(8.11),(8.15)}{=} \frac{1}{|z_2|^2}(z_1 z_2^*)^* \overset{(8.14),(8.19)}{=} \frac{z_1^*}{z_2^*}$ (8.20)

Damit läßt sich (8.10) auch direkt beweisen:

$|z_1z_2|^2 \overset{(8.14)}{=} (z_1z_2)(z_1z_2)^* \overset{(8.19)}{=} z_1z_1^*\cdot z_2z_2^* \overset{(8.14)}{=} |z_1|^2|z_2|^2$

8.2.6 Bemerkung:

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bildet im Sinne der Axiome von Abschnitt 1.2.1 bezüglich der Addition und der Multiplikation einen Körper.

8.3 Euler-Formel:

Die Euler-Formel wird im folgenden hilfreich sein, um die polarkoordinaten Darstellung komplexer Zahlen zu formulieren.

8.3.1 Herleitung über Taylor-Reihen:

Nach Abschnitt 3.4 und Abschnitt 6.2 wurde die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion eingeführt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ ; x\in\mathbb{R} \qquad (8.21)$$

Wir untersuchen nun die analytische Fortsetzung

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}\ ; x\in\mathbb{R} \qquad (8.22)$$

Aufgrund von (8.4) betrachten wir die geraden und die ungeraden Reihenglieder separat

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (8.23)$$

Mit $i^{2n}=(i^2)^n=(-1)^n$ und $i^{2n+1}=i^{2n}\cdot i=(-1)^n i$ folgt

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (8.24)$$

Der Vergleich mit Abschnitt 3.4 zeigt, dass die geraden (ungeraden) Reihenglieder auf die Taylor-Reihe des Kosinus (Sinus) und damit auf die Euler-Formel führen

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad (8.25)$$

8.3.2 Additionstheoreme:

Wir behandeln nun eine wichtige Anwendung der Euler-Formel. Aus (8.25) und dem Potenzgesetz

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \qquad (8.26)$$

folgen nämlich die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

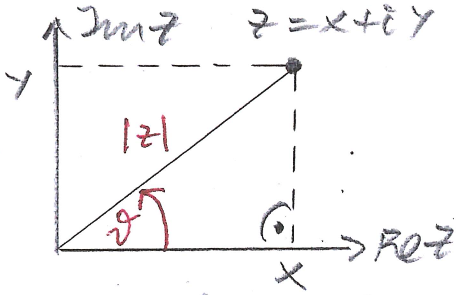
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & (8.27) \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & (8.28) \end{cases}$$

8.4 Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen:

Bisher haben wir komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene durch deren kartesische Koordinaten, also deren Real- und Imaginärteil, charakterisiert. Nun wollen wir die Polarkoordinaten-Darstellung einführen.

8.4.1 Argument und Phasenfaktor:



In der Gaußschen Zahlenebene lassen sich wie folgt Polarkoordinaten einführen. Der Abstand ρ zum Ursprung ist gerade der Betrag der komplexen Zahl:

$$\rho = |z| \qquad (8.29)$$

und der Winkel ϑ wird als Argument der komplexen Zahl bezeichnet:

$$\vartheta = \arg(z) \qquad (8.30)$$

Sind Real- und Imaginärteil x und y bekannt, so folgt

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (8.31)$$

$$\vartheta = \arctan \frac{y}{x} \qquad (8.32)$$

Umgekehrt läßt sich die komplexe Zahl auch durch Polarkoordinaten ausdrücken:

$$\left.\begin{matrix} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{matrix}\right\} \xRightarrow{(8.3)} z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad (8.33)$$

Aufgrund der Euler-Formel (8.25) vereinfacht sich (8.33) zu

$$z = \rho\, e^{i\vartheta} \qquad (8.34)$$

Man bezeichnet $e^{i\vartheta}$ als Phasenfaktor von z. Aufgrund der Eigenschaft

$$|e^{i\vartheta}| = |\cos\vartheta + i\sin\vartheta| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = 1 \qquad (8.35)$$

liegt der Phasenfaktor auf dem Einheitskreis um den Ursprung. Wir bemerken ferner, dass die konjugiert komplexe Zahl (8.11) aufgrund von (8.34) die folgende Polarkoordinaten-Darstellung besitzt:

$$z^* = \varrho e^{-i\vartheta} \qquad (8.36)$$

8.4.2 Multiplikation und Division:

Es seien $\vartheta_1 = \arg(z_1)$ und $\vartheta_2 = \arg(z_2)$ die Argumente zweier komplexen Zahlen z_1 und z_2 sowie ϱ_1 und ϱ_2 deren entsprechende Beträge. Dann gilt für die Multiplikation der beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 \overset{(8.34)}{=} \varrho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \varrho_2 e^{i\vartheta_2} \overset{(8.26)}{=} \varrho_1\varrho_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)} \qquad (8.37)$$

Es multiplizieren sich demnach die Beträge gemäß (8.10) und es addieren sich die Argumente:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \qquad (8.38)$$

Entsprechend folgt für die Division zweier komplexer Zahlen:

$$\frac{z_1}{z_2} \overset{(8.15)}{=} \frac{1}{|z_2|^2} z_1 z_2^* = \frac{1}{\varrho_2^2} \varrho_1 e^{i\vartheta_1} \varrho_2 e^{-i\vartheta_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)} \qquad (8.39)$$

Also werden die Beträge gemäß (8.16) dividiert und die Argumente werden subtrahiert:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \qquad (8.40)$$

8.4.3 Folgerungen:

a) Spezialisiert man (8.37) auf $z_1 = z_2 = e^{i\vartheta}$, so folgt

$$e^{i\vartheta} \cdot e^{i\vartheta} = e^{2i\vartheta} \qquad (8.41)$$

Einsetzen der Euler-Formel (8.25) führt auf

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2 = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta + 2i\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$= \cos(2\vartheta) + i\sin(2\vartheta) \qquad (8.42)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(2\vartheta) = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \\ \sin(2\vartheta) = 2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{cases} \qquad (8.43)$$

Es handelt sich hierbei um Spezialfälle der Additionstheoreme (8.27), (8.28).

b) Durch Iteration folgt dann

$$e^{i\vartheta} \cdot e^{2i\vartheta} = e^{3i\vartheta} \quad (8.40)$$

Einsetzen der Euler-Formel (8.25) und Zerlegung in Real- und Imaginärteil führt auf die Moivre-Formeln:

$$\cos(3\vartheta) = \cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\sin^2\vartheta \quad (8.45)$$

$$\sin(3\vartheta) = 3\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \sin^3\vartheta \quad (8.46)$$

c) Durch weitere Iteration erhalten wir

$$(e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad (8.47)$$

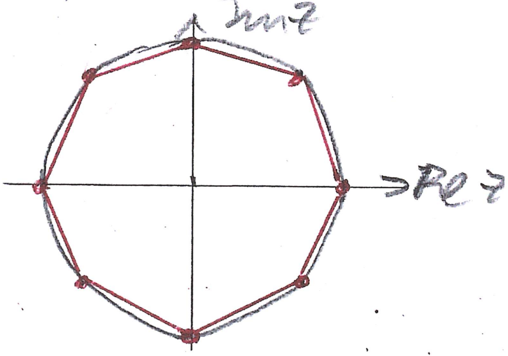
was mit der Euler-Formel (8.25) auf

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = e^{in\vartheta} \quad (8.48)$$

führt. Setzen wir nun $\vartheta_k = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ so folgt

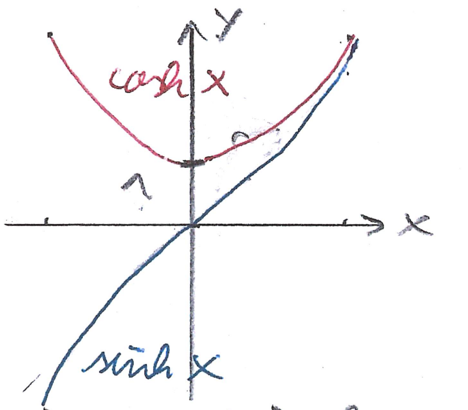
$$(\cos\vartheta_k + i\sin\vartheta_k)^n = e^{in\vartheta_k} = e^{2\pi i k} = 1 \quad (8.49)$$

Demnach stellen $e^{i\vartheta_k}$ die $n$ten Einheitswurzeln dar. Sie bilden ein dem Einheitskreis eingeschriebenes n-Eck. Beispiel: $n = 8$



8.5 Hyperbelfunktionen:

Mit Hilfe der Exponentialfunktion lassen sich Hyperbelfunktionen definieren:



$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (8.50)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (8.51)$$

Die Hyperbelfunktionen besitzen ähnliche Eigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen:

a) Symmetrie:

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad (8.52)$$

$$\cosh(-x) = \cosh x \quad (8.53)$$

b) Taylor-Reihen:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots \quad (8.54)$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots \quad (8.55)$$

c) Hyperbolischer Pythagoras:
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad (8.56)$$
d) Additionstheoreme:
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \qquad (8.57)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \qquad (8.58)$$
e) Differentiation:
$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (8.59)$$
$$(\cosh x)' = \sinh x \qquad (8.60)$$
f) Integration:
$$\int^x \sinh y \, dy = \cosh x \qquad (8.61)$$
$$\int^x \cosh y \, dy = \sinh x \qquad (8.62)$$
Woher kommt diese Ähnlichkeit zwischen Hyperbel-funktionen und trigonometrischen Funktionen? Hierzu betrachten wir die Euler-Formel:
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) & (8.63) \\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) & (8.64) \end{cases}$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$
Durch analytische Fortsetzung dieser Umkehrung der Euler-Formel, also durch die Substitution $x \to ix$, erhalten wir:
$$\cos(ix) \overset{(8.63)}{=} \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) \overset{(8.51)}{=} \cosh x \qquad (8.65)$$
$$\sin(ix) \overset{(8.64)}{=} \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x}) \overset{(8.50)}{=} i \sinh x \qquad (8.66)$$
Demnach erhält man durch analytische Fortsetzung der trigonometrischen Funktionen gerade die Hyperbel-funktionen. Entsprechendes gilt auch umgekehrt:
$$\cosh(ix) \overset{(8.51)}{=} \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \overset{(8.63)}{=} \cos x \qquad (8.67)$$
$$\sinh(ix) \overset{(8.50)}{=} \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) \overset{(8.64)}{=} i \sin x \qquad (8.68)$$

8.6 Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom n-ten Grades
$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \qquad (8.69)$$
mit $a_k \in \mathbb{C}$ besitzt nach Gauß genau n komplexe Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ mit der Eigenschaft

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)\cdot(z - z_2)\cdot \ldots \cdot(z - z_n) \qquad (8.70)$$

Hierbei dürfen Nullstellen mehrfach vorkommen und werden dann entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

Als Beispiel betrachten wir nochmals das Polynom zweiter Ordnung (8.1) mit der Lösung (8.2). Mit Hilfe der komplexen Zahlen lauten die beiden Lösungen

$$x_\pm = 2 \pm 3i \qquad (8.71)$$

Zur Probe überprüfen wir

$$(x - x_+)(x - x_-) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = x^2 - 4x + 13 \checkmark$$