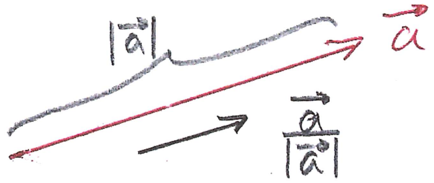
# Kapitel 9: Vektorrechnung

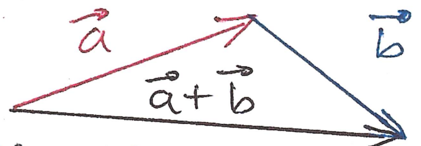
In der Physik hat man es häufig mit Größen zu tun, die eine Richtung besitzen. Wichtige Beispiele hierfür sind der Ort eines Teilchens, seine Geschwindigkeit oder die Kraft, die auf ihn wirkt. Solche gerichteten Größen bezeichnet man als Vektoren.

## 9.1 Rechenregeln mit Vektoren:

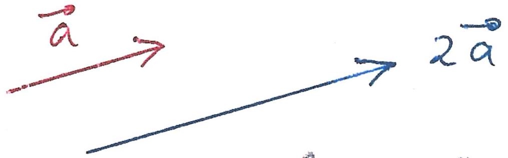
Ein Vektor $\vec{a}$ ist eine gerichtete Größe, die durch einen Pfeil mit dem Betrag $|\vec{a}|$ und die Richtung $\vec{a}/|\vec{a}|$ definiert wird:




Die beiden grundlegenden Operationen von Vektoren sind die Addition von Vektoren




und die Multiplikation von Vektoren mit einer reellen Zahl:




Multipliziert man einen Vektor $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl $\lambda$, so führt dies auf den Vektor $\lambda\vec{a}$, der in Richtung von $\vec{a}$ zeigt und den Betrag $\lambda\vec{a}$ besitzt. Für diese beiden Operationen mit Vektoren gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Kommutativität:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (9.1) $\qquad \lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$ (9.2)

b) Assoziativität:

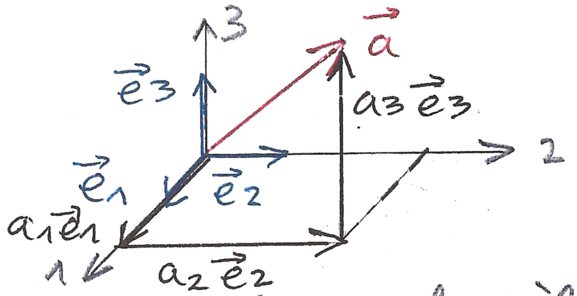
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (9.3) $\qquad \lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ (9.4)

c) Distributivität:

$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (9.5) $\qquad \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (9.6)

## 9.2 Komponentendarstellung von Vektoren:

Zu einem Vektor $\vec{a}$ mit dem Betrag $a$ läßt sich ein Einheitsvektor $\vec{e}=\vec{a}/|\vec{a}|$ konstruieren, der in Richtung von $\vec{a}$ zeigt und den Betrag $|\vec{e}| = 1$ hat. Ein Koordinatensystem wird durch drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ definiert, die jeweils paarweise senkrecht aufeinander stehen. Projiziert man einen Vektor $\vec{a}$ auf diese Einheitsvektoren, so ergeben sich die Vektoren $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$, $a_3\vec{e}_3$, deren Addition wieder auf den Vektor $\vec{a}$ führt:




$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad (9.7)$$

Aufgrund dieser Komponentendarstellung schreibt man den Vektor $\vec{a}$ durch das Tripel der Projektionslängen $a_1, a_2, a_3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad (9.8)$$

Die drei Einheitsvektoren entsprechen dann den Tripeln

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9.9)$$

Der Betrag des Vektors $\vec{a}$ ergibt sich aus dem räumlichen Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \qquad (9.10)$$

Die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl sind dann komponentenweise definiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \qquad (9.11)$$

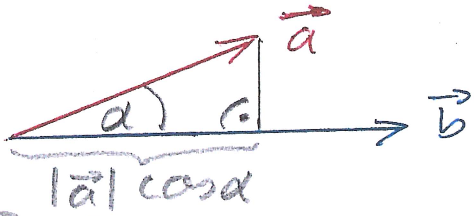
## 9.3 Skalarprodukt zweier Vektoren:

Einem Paar von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird mit Hilfe eines Skalarproduktes ein Skalar zugeordnet, indem das Produkt der Beträge der beiden Vektoren mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ multipliziert wird:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha \qquad (9.12)$$

Anschaulich entspricht das Skalarprodukt der Länge der Projektion von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$ multipliziert mit $|\vec{b}|$.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ genügt den folgenden Axiomen:




a) Kommutativität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (9.13)

b) Distributivität:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \qquad (9.14)$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \qquad (9.15)$$

Es gibt zwei wichtige Spezialfälle des Skalarproduktes:

1.) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander, ist also $\alpha = 0$, so folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \,, \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \qquad (9.16)$$

Insbesondere gilt dann für $\vec{b} = \vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \qquad (9.17)$$

2.) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander, ist also $\alpha = \pi/2$, so folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \,, \quad \vec{a} \perp \vec{b} \qquad (9.18)$$

Demnach gilt für das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$ eines Koordinatensystems mit zueinander orthogonalen Koordinatenachsen

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad (9.19)$$

wobei das Kronecker-Symbol definiert ist durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \,; & i = j \\ 0 \,; & i \neq j \end{cases} \qquad (9.20)$$

Es seien nun zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der jeweiligen Komponentendarstellung (9.7) gegeben:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \,, \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j \qquad (9.21)$$

Dann läßt sich das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ durch die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left( \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

$$\underset{=}{\underline{(9.19)}} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} \underset{=}{\underline{(9.20)}} \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (9.22)$$

Hieraus lassen sich die folgenden Konsequenzen ablesen:

1) Bildet man das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Einheitsvektor $\vec{e}_i$, so folgt

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \qquad (9.23)$$

2) Das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit sich selbst führt auf den räumlichen Pythagoras:

$$|\vec{a}| \overset{(9.17)}{=} \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \overset{(9.22)}{=} \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \qquad (9.24)$$

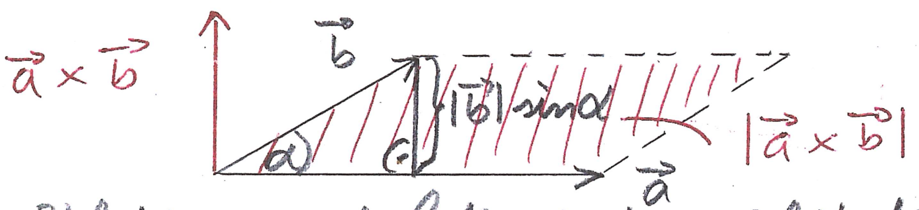
3) Den Winkel $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ läßt sich aus den Komponenten berechnen:

$$\alpha \overset{(9.12)}{=} \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\overset{(9.22),(9.24)}{=} \arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}} \qquad (9.25)$$

## 9.4 Vektorprodukt zweier Vektoren:

Einem Paar von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird mit Hilfe des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor zugeordnet. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ steht dabei zu dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm senkrecht, so dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden:




Der Betrag des Vektorproduktes entspricht dabei der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{Grundlänge}} \cdot \underbrace{|\vec{b}| \sin\alpha}_{\text{Höhe}}, \quad \alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \qquad (9.26)$$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genügt den folgenden Axiomen:

a) Antikommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $\qquad (9.27)$

b) Distributivität:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \qquad (9.28)$$

$$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \qquad (9.29)$$

Wir betrachten nun das Vektorprodukt zweier Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$. Für $i = j$ folgt aus der Antikommutativität (9.27) der Nullvektor:

$$\vec e_1 \times \vec e_1 = \vec 0, \quad \vec e_2 \times \vec e_2 = \vec 0, \quad \vec e_3 \times \vec e_3 = \vec 0 \qquad (9.30)$$

Im Falle $i \neq j$ ergibt aber $\vec e_i \times \vec e_j$ einen Vektor vom Betrag Eins. Ferner steht der Vektor $\vec e_i \times \vec e_j$ senkrecht auf $\vec e_i$ und $\vec e_j$, so dass $\vec e_i, \vec e_j$ und $\vec e_i \times \vec e_j$ ein Rechtssystem bilden:

$$\vec e_1 \times \vec e_2 = \vec e_3, \quad \vec e_2 \times \vec e_3 = \vec e_1, \quad \vec e_3 \times \vec e_1 = \vec e_2 \qquad (9.31)$$

Mit der Komponentendarstellung der Vektoren $\vec a, \vec b$ folgt nun das Vektorprodukt $\vec a \times \vec b$ zu

$$\vec a \times \vec b = (a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3) \times (b_1 \vec e_1 + b_2 \vec e_2 + b_3 \vec e_3)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\vec e_1 \times \vec e_1}_{= \vec 0} + a_1 b_2 \underbrace{\vec e_1 \times \vec e_2}_{= \vec e_3} + a_1 b_3 \underbrace{\vec e_1 \times \vec e_3}_{= -\vec e_2}$$

$$+ a_2 b_1 \underbrace{\vec e_2 \times \vec e_1}_{= -\vec e_3} + a_2 b_2 \underbrace{\vec e_2 \times \vec e_2}_{= \vec 0} + a_2 b_3 \underbrace{\vec e_2 \times \vec e_3}_{= \vec e_1}$$

$$+ a_3 b_1 \underbrace{\vec e_3 \times \vec e_1}_{= \vec e_2} + a_3 b_2 \underbrace{\vec e_3 \times \vec e_2}_{= -\vec e_1} + a_3 b_3 \underbrace{\vec e_3 \times \vec e_3}_{= \vec 0}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec e_3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad (9.32)$$

Wir können nun anhand der Komponentendarstellung zeigen, dass das Vektorprodukt $\vec a \times \vec b$ senkrecht auf $\vec a$ steht:

$$\vec a \cdot (\vec a \times \vec b) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1(\cancel{a_2 b_3} - \cancel{a_3 b_2}) + a_2(\cancel{a_3 b_1} - \cancel{a_1 b_3}) + a_3(\cancel{a_1 b_2} - \cancel{a_2 b_1}) = 0 \checkmark$$

Analog gilt:

$$\vec b \cdot (\vec a \times \vec b) \overset{(9.27)}{=} -\vec b \cdot (\vec b \times \vec a) = 0 \checkmark$$

Außerdem folgt aus der Komponentendarstellung des Skalarproduktes und des Vektorproduktes der räumliche Pythagoras:

$$(\vec a \times \vec b)^2 + (\vec a \cdot \vec b)^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2$$

$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

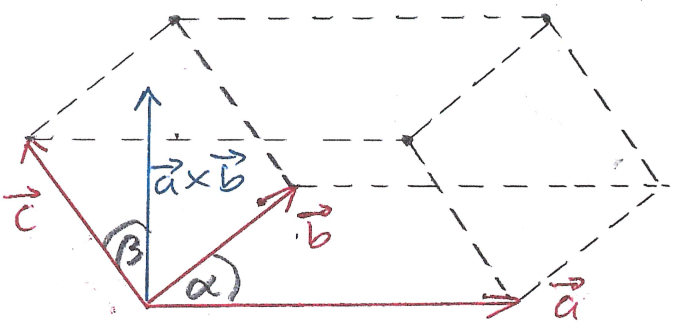
$$= \ldots = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \overset{(9.24)}{=} |\vec a|^2 |\vec b|^2 \qquad (9.33)$$

Daraus folgt dann

$$(\vec a \times \vec b)^2 = |\vec a|^2 |\vec b|^2 - (\vec a \cdot \vec b)^2 \overset{(9.12)}{=} |\vec a|^2 \cdot |\vec b|^2 (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow |\vec a \times \vec b| = |\vec a||\vec b| \sin \alpha \mathrel{\hat=} (9.26) \checkmark$$

## 9.5 Spatprodukt dreier Vektoren:




Das Spatprodukt dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wird so definiert, dass es gerade mit dem Volumen $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des Parallelepipeds übereinstimmt, das von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird. Mit der Grundfläche des Parallelepipeds $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$ und dessen Höhe $|c|\cos\beta$ folgt dann

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\beta \qquad (9.34)$$

Für die Komponentendarstellung gilt dann

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad (9.35)$$

$$= a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Hieraus folgt, dass man innerhalb des Spatproduktes die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zyklisch vertauschen kann:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = V(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) \qquad (9.36)$$

Bilden die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem, so wird das Volumen des Parallelepipeds positiv gerechnet, im Falle eines Linkssystems entsprechend negativ.

## 9.6 Zweifaches Vektorprodukt:

Das zweifache Vektorprodukt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ist im Unterschied zum Spatprodukt wiederum ein Vektor. Da ein Vektorprodukt senkrecht auf seinen Faktoren steht, ist das zweifache Vektorprodukt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}\times\vec{c}$. Das Vektorprodukt $\vec{b}\times\vec{c}$ wiederum ist senkrecht zu der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene. Deshalb muss das zweifache Vektorprodukt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene liegen:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \qquad (9.37)$$

Aus der Orthogonalität von $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ zu $\vec{a}$ folgt dann

$$\vec{a}\cdot[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})] = 0 = \beta(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \gamma(\vec{a}\cdot\vec{c}) \qquad (9.38)$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{c}), \quad \gamma = -\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Einsetzen von (9.38) in (9.37) führt zum Zwischenergebnis

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha \{ \vec{b} \, (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \, (\vec{a} \cdot \vec{b}) \} \tag{9.39}$$

Um den noch offenen Faktor $\alpha$ zu bestimmen, gehen wir in (9.39) zur Komponentenschreibweise über:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \underset{}{\overset{(9.32)}{=}} \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \tag{9.40}$$

$$\vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\vec{b}) = \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_3c_3 + a_1c_1) - c_2(a_3b_3 + a_1b_1) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} \tag{9.41}$$

Der Vergleich von (9.39) – (9.41) führt auf $\alpha = 1$ und wir erhalten die "bac – cab"-Regel:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{9.42}$$