Über die Eindeutigkeit von HAHN-BANACH-Fortsetzungen

Joachim Backes

Als Diplomarbeit an der Universität des Saarlandes
unter Anleitung von Prof. Dr. Heinz König angefertigt
von cand. math. Joachim Backes

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich diese Diplomarbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Saarbrücken, den 10. Juli 1970

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Eine vielgebrauchte Version des Satzes von HAHN-BANACH lautet: Seien E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und ϑ ein sublineares Funktional auf E. Dann existiert ein lineares Funktional φ auf E mit $\varphi(x) \leq \vartheta(x)$ für alle $x \in E$. Im 2. Kapitel werden wir diesen Satz nach einer Idee von R. Kaufman [5] beweisen und technische Hilfsmittel für das folgende bereitstellen.

Im 3. Kapitel beginnen wir mit dem eigentlichen Thema dieser Arbeit: E.T. POULSEN hat in [2] folgenden Satz von FULLERTON und BRAUNSCHWEIGER bewiesen:

Seien E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, $M \subset E$ ein Untervektorraum und $a \in M$, $\|a\| = 1$, ein quasiinterner Punkt einer Seite F der Einheitskugel von M. Ist dann $\varphi \in M^*$ mit $\|\varphi\| = 1 = \varphi(a) = \|a\|$, so ist φ eindeutig normerhaltend auf ganz E fortsetzbar.

In der vorliegenden Arbeit werden wir diesen Satz auf den allgemeinen Fall eines sublinearen Funktionals übertragen.

Während im 3. Kapitel die eindeutige Fortsetzbarkeit dieses speziellen linearen Funktionals unterhalb eines sublinearen untersucht wird, werden wir im 4. Kapitel hinreichende und notwendige Bedingungen dafür angeben, dass man **alle** linearen Funktionale auf einem Untervektorraum M eines rellen Vektorraumes, die unterhalb $\vartheta|_M$ liegen, eindeutig unterhalb ϑ auf ganz E fortsetzen kann. Diesen allgemeinen Satz wenden wir im 5. Kapitel zur Verallgemeinerung eines Satzes von GARKAVI an, auf den E.T. POULSEN in [2] hinweist: Alle stetigen linearen Funktionale auf einem endlichdimensionalen Unterraum M eines reellen normierten Raumes E sind genau dann normerhaltend eindeutig bis auf E fortsetzbar, wenn für jedes $0 \neq x \in M$ ein zu M komplementärer Unterraum N_x existiert, in dessen Richtungen die Norm in x Gateaux-differenzierbar ist.

Im 6. Kapitel schließlich werden wir im Rahmen des GARKAVIschen Satzes zwei Gegenbeispiele diskutieren.

Ich möchte es nicht versäumen, an dieser Stelle Herrn Professor König für die Anregungen, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, zu danken.

Kapitel 2

Sublineare Funktionale und der Satz von HAHN-BANACH

Im folgenden sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

2.1 Definition

Eine Abbildung $\vartheta : E \to \mathbb{R}$ heißt ein sublineares Funktional, wenn

1. $\vartheta(x+y) \leq \vartheta(x) + \vartheta(y)$ für alle $x, y \in E$
2. $\vartheta(\lambda x) = \lambda\vartheta(x)$ für alle $x \in E$ und alle $\lambda > 0$

2.2 Bemerkungen

1. Jedes lineare Funktional auf E ist sublinear.
2. Ist $\vartheta : E \to \mathbb{R}$ sublinear, so ist $\vartheta(0) = 0$ wegen $\vartheta(0) = \vartheta(2 \cdot 0) = 2 \cdot \vartheta(0)$, und $-\vartheta(-x) \leq \vartheta(x)$ für alle $x \in E$ wegen $0 = \vartheta(0) \leq \vartheta(x) + \vartheta(-x)$.
3. Ist $\vartheta : E \to [-\infty, \infty[$ eine Abbildung mit 1. und 2. sowie $\vartheta(0) = 0$, so ist $\vartheta(x) > -\infty$ für alle $x \in E$ wegen $0 = \vartheta(0) \leq \vartheta(x) + \vartheta(-x)$, also ϑ ein sublineares Funktional.
4. Ein sublineares Funktional $\vartheta : E \to \mathbb{R}$ ist linear genau dann wenn $\vartheta(x+y) = \vartheta(x) + \vartheta(y)$ für alle $x, i \in E$, oder, äquivalent dazu, $\vartheta(x) + \vartheta(-x) = 0$ für alle $x \in E$.

2.3 Definition

Die Menge aller sublinearen Funktionale auf E bezeichnen wir mit Sub(E). $E^* \subset Sub(E)$ sei die Gesamtheit aller linearen Funktionale auf E.

Sub(E) werde geordnet durch

$$\vartheta \leq \Theta$$

genau dann wenn $\vartheta(x) \leq \Theta(x)$ für alle $x \in E$.

2.4 Definition

Für $\vartheta \in Sub(E)$ sei $S(\vartheta) := \{\varphi \in E^* : \varphi \leq \vartheta\}$. Offenbar gilt:

2.5 Bemerkung

$S(\vartheta) \subset E^*$ ist konvex und schwach*-kompakt.

Beweis: $S(\vartheta)$ ist trivialerweise konvex. Ferner ist $S(\vartheta) \subset E^*$ wegen

$$S(\vartheta) = \bigcap_{x \in E} \{\varphi \in E^* : \varphi(x) \leq \vartheta(x)\}$$

schwach*-abgeschlossen; schließlich haben wir $-\vartheta(x) \leq \varphi(x) \leq \vartheta(x)$ für alle $\varphi \in S(\vartheta), x \in E$, also

$$S(\vartheta) \subset \prod_{x \in E} [-\vartheta(-x), \vartheta(x)],$$

mithin $S(\vartheta)$ schwach*-kompakt nach dem Satz von Tychonoff.

2.6 Lemma

Sub(E) ist induktiv geordnet.

Beweis: Sei $T \subset Sub(E)$ eine nichtleere total geordnete Teilmenge. Wir definieren $\Theta : E \to [-\infty, \infty[$ durch

$$\Theta(x) = Inf\{\Theta'(x) : \Theta' \in T\}.$$

Es is offenbar $\Theta(0) = 0$, und für alle $x, y \in E$ und $\Theta', \Theta'' \in T$ gilt

$$\Theta'(x) + \Theta''(y) \geq \Theta'(x) + \Theta'(y) \geq \Theta'(x+y) \geq \Theta(x+y)$$

bzw.

$$\Theta'(x) + \Theta''(y) \geq \Theta''(x) + \Theta''(y) \geq \Theta''(x+y) \geq \Theta(x+y)$$

jeweils wenn $\Theta' \leq \Theta''$ *bzw.* $\Theta' \geq \Theta''$, mithin $\Theta(x+y) \leq \Theta(x) + \Theta(y)$. Trivialerweise kommt $\Theta(\lambda \cdot x) = \lambda\Theta(x)$ für alle $x \in E$, so dass $\Theta \in Sub(E)$ nach Bemerkung 2.2.

Um die nach Lemma 2.6 existierenden minimalen Punkte von Sub(E) zu charakterisieren, brauchen wir die auch für spätere Zwecke wichtige

2.7 Definition

Für $a \in E, \vartheta \in Sub(E)$ sei

$$\vartheta_a : E \to [-\infty, \infty[$$

$$\vartheta_a(x) = Inf\{\vartheta(x + ta) - t\vartheta(a) : t \geq 0\}$$

Dann haben wir

2.8 Behauptung

Es ist $\vartheta_a \in Sub(E)$, $\vartheta_a \leq \vartheta$ und $S(\vartheta_a) = \{\varphi \in S(\vartheta) : \varphi(a) = \vartheta(a)\}$.

Beweis:

1. Seien $x, y \in E$ beliebig. Dann gilt für alle $s, t \geq 0$
   $\vartheta(x + ta) + \vartheta(y + sa) - t\vartheta(a) - s\vartheta(a)$
   $\geq\ \vartheta([x + y] + [t + s]a) - (t + s)\vartheta(a)$
   $\geq \vartheta_a(x + y)$, also auch $\vartheta_a(x) + \vartheta_a(y) \geq \vartheta_a(x + y)$.

   Ferner kommt für alle $\lambda > 0$:
   $\vartheta_a(\lambda x) = Inf\{\vartheta(\lambda x+ta)-t\vartheta(a) : t \geq 0\} = Inf\{\lambda(\vartheta(x+\lambda^{-1}ta)-\lambda^{-1}t\vartheta(a)) : t \geq 0\} = \lambda\vartheta_a(x)$.

   Schließlich ist $\vartheta_a(0) = Inf\{\vartheta(ta) - t\vartheta(a); t \geq 0\} = 0$, so dass $\vartheta_a \in Sub(E)$ nach Bemerkung 2.2. Dann aber ist $\vartheta_a \leq \vartheta$ trivial.

2. Sei $\varphi \in S(\vartheta_a)$. Dann gilt für alle $x \in E$: $\varphi(x) \leq \vartheta_a(x) \leq \vartheta(x)$, d.h. es ist $\varphi \leq \vartheta$ und damit insbesondere $\varphi(a) \leq \vartheta(a)$. Andererseits kommt $-\varphi(a) = \varphi(-a) \leq \vartheta_a(-a) \leq \vartheta(-a + 1 \cdot a) - 1 \cdot \vartheta(a) = -\vartheta(a)$, d.h. $\varphi(a) \geq \vartheta(a)$ und somit $\varphi(a) = \vartheta(a)$ wie behauptet.
   Sei umgekehrt $\varphi \in S(\vartheta)$ und $\varphi(a) = \vartheta(a)$. Dann haben wir für alle $x \in E$ und $t \geq 0$: $\varphi(x) = \varphi(x + ta) - t\varphi(a) \leq \vartheta(x + ta) - t\vartheta(a)$, d.h. $\varphi(x) \leq \vartheta_a(x)$.

2.9 Lemma

Die minimalen Elemente von Sub(E) sind genau die linearen Funktionale auf E.

Beweis: Seien $\vartheta \in Sub(E)$ minimal und $x, y \in E$ beliebig. Dann ist $\vartheta_x \in Sub(E), \vartheta_x \leq \vartheta$ nach Voraussetzung und damit $\vartheta(y) = \vartheta_x(y) \leq \vartheta(y + 1 \cdot x) - 1 \cdot \vartheta(x) = \vartheta(y+x) - \vartheta(x)$, d.h. $\vartheta(x)+\vartheta(y) = \vartheta(x+y)$. Also ist $\vartheta \in E^*$ nach Bemerkung 2.2 Sei umgekehrt $\varphi \in E^*$. Ist dann $\vartheta \in Sub(E)$ mit $\vartheta \leq \varphi$, so kommt $\vartheta(-x) \leq \varphi(-x) = -\varphi(x)$, also $\varphi(x) \leq -\vartheta(-x) \leq \vartheta(x)$ für alle $x \in E$, d.h. es ist $\varphi = \vartheta$.

Aus dem vorstehenden folgt sehr leicht

2.10 Satz von HAHN-BANACH

Für $\vartheta \in Sub(E)$ ist $S(\vartheta) \neq \emptyset$.

Beweis: Wir bilden $M = \{\Theta \in Sub(E) : \Theta \leq \vartheta\} \neq \emptyset$ wegen $\vartheta \in M$. Nach Lemma 2.6 besitzt jede total geordnete Teilmenge $T \subset M$ eine untere Schranke ϑ_T in Sub(E), die $\vartheta_T \leq \vartheta$ erfüllt, d.h. $\vartheta_T \in M$. Nach dem Zornschen Lemma enthält demnach M ein minimales Element φ, das wegen $\varphi \leq \vartheta$ auch minimales Element von Sub(E) ist.

Als Konsequenz hieraus notieren wir

2.11 Korrolar

Seien $\vartheta \in Sub(E)$ und $K \subset E$ konvex. Dann existiert ein $\varphi \in S(\vartheta)$ mit

$Inf\{\varphi(x) : x \in K\} = Inf\{\vartheta(x) : x \in K\}$.

Beweis: Wir können offenbar anehmen, dass $I := Inf\{\vartheta(x); x \in K\} > -\infty$ ist. Sei dann $\vartheta_k : E \to [-\infty, \infty[$ definiert durch

$$\vartheta_k(x) = Inf\{\vartheta(x + ta) - tI : t > 0, a \in K\} \ (x \in E).$$

Trivialerweise ist $\vartheta_K(0) = 0$ sowie $\vartheta_K(\lambda x) = \lambda\vartheta_K(x)$ für alle $\lambda > 0$ und $x \in E$. Sind nun $x, y \in E$ beliebig, so gilt für alle $s, t > 0$ und alle $a, b \in K$:

$\vartheta(x + sa) - sI \ \vartheta(y + tb) - tI \geq$
$\vartheta([x + y] + sa + tb) - (s + t)I =$
$\vartheta([x + y] + (s + t)[\frac{s}{s+t}a + \frac{t}{s+t}b]) - (s + t)I \geq \vartheta_K(x + y)$
-letzteres, da K konvex ist, also $\frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t}b \in K$-
und damit auch $\vartheta_K(x + y) \leq \vartheta_K(x) + \vartheta_K(y)$. Wir haben also $\vartheta_K \in Sub(E)$ nach Bemerkung 2.2, und offenbar $\vartheta_K \leq \vartheta$. Nach dem Satz von HAHN-BANACH existiert ferner ein $\varphi \in E^*$ mit $\varphi \leq \vartheta_K$. Dann ist $\varphi \leq \vartheta$ und damit $Inf\{\varphi(a) : a \in K\} \leq I$. Andererseits gilt für $a \in K : -\varphi(a) = \varphi(-a) \leq \vartheta_K(-a) \leq \vartheta(-a+1\cdot a)-1\cdot I = -I$, d.h. es ist $I \leq \varphi(a)$, also $I = Inf\{\varphi(a) : a \in K\}$, was zu zeigen war.

2.12 Korollar

Für $\vartheta \in Sub(E)$ und $x \in E$ ist $\{\varphi(x) : \varphi \in S(\vartheta)\} = [-\vartheta(-x), \vartheta(x)]$.

Beweis: Wir haben die Inklusion $\supset$ zu zeigen. Sei $t \in [-\vartheta(-x), \vartheta(x)]$, d.h. es gibt $\lambda \in [0, 1]$ mit $t = \lambda(-\vartheta(-x)) + (1 - \lambda)\vartheta(x)$. Nach Korollar 2.11 existiert ein $\varphi \in S(\vartheta)$ mit $\varphi(x) = \vartheta(x)$, und es existiert ein $\psi \in S(\vartheta)$ mit $-\psi(-x) = \vartheta(-x)$. Sei $\chi = \lambda\psi + (1 - \lambda)\varphi \in S(\vartheta)$. Dann gilt $\chi(x) = \lambda\psi(x) + (1 - \lambda)\varphi(x) = \lambda(-\vartheta(-x)) + (1 - \lambda)\vartheta(x) = t$.

Insbesondere haben wir also

2.13 Bemerkung

1. $\vartheta(x) = Max\{\varphi(x) : \varphi \in S(\vartheta)\}$ für alle $x \in E$.
2. $S(\vartheta)$ ist einpunktig genau dann wenn ϑ linear ist.

Kapitel 3

Der Satz von FULLERTON und BRAUNSCHWEIGER

Im gesamten Kapitel seien E ein fester Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\vartheta \in Sub(E)$ fixiert.

3.1 Definition

Sei $M \subset E$ ein Untervektorraum und $\varphi \in M^*, \varphi \leq \vartheta|_M$. $\vartheta_\varphi : E \to [-\infty, \infty[$ sei erklärt durch: $\vartheta_\varphi(x) = Inf\{\vartheta(x+u) - \varphi(u) : u \in M\}$.

Dann haben wir

3.2 Behauptung

1. $\vartheta_\varphi \in Sub(E),\ \vartheta_\varphi|_M = \varphi$.
2. $S(\vartheta_\varphi) = \{\Phi \in E^* : \Phi \leq \vartheta \ und \ \Phi|_M = \varphi\}$.

Beweis:

1. Seien $x, y \in E$ beliebig. Dann gilt für alle $u, v \in M$:

   $\vartheta(x+u) - \varphi(u) + \vartheta(y+v) - \varphi(v) =$
   $\vartheta(x+u) + \vartheta(y+v) - \varphi(u+v) \geq$
   $\vartheta([x+y] + [u+v]) - \varphi(u+v) \geq$
   $\vartheta_\varphi(x+y)$, also auch $\vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(y) \geq \vartheta_\varphi(x+y)$, also auch $\vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(y) \geq \vartheta_\varphi(x+y)$.
   Trivial ist $\vartheta_\varphi(0) = 0$ und $\vartheta_\varphi(\lambda x) = \lambda \vartheta_\varphi(x)$ für alle $\lambda > 0$ und $x \in E$, so dass $\vartheta_\varphi \in Sub(E)$ nach Bemerkung 2.2. Ist insbesondere $x \in M$, so gilt $\vartheta_\varphi(x) = Inf\{\vartheta(x+u) - \varphi(u) : u \in M\} = Inf\{\vartheta(0 + (x+u)) - \varphi(x+u) : u \in M\} + \varphi(x) = \vartheta_\varphi(0) + \varphi(x) = \varphi(x)$.

2. Es sei $\Phi \in S(\vartheta_\varphi)$.
   Wir haben dann für alle $x \in E$: $\Phi(x) \leq \vartheta_\varphi(x) \leq \vartheta(x+0) - \varphi(0) = \vartheta(x)$.
   Ferner gilt für $x \in M : \Phi(x) \leq \vartheta_\varphi(x) = \varphi(x)$, also $\Phi|_M = \varphi$.
   Ist umgekehrt $\Phi \leq \vartheta$ und $\Phi|_M = \varphi$, so folgt für alle $x \in E$ und alle $u \in M$: $\Phi(x) = \Phi(x+u) - \Phi(u) = \Phi(x+u) - \varphi(u) \leq \vartheta(x+u) - \varphi(u)$, mithin $\Phi(x) \leq \vartheta_\varphi(x)$.

Hieraus fließt unmittelbar

3.3 Satz

Seien $M \subset E$ ein Untervektorraum, $\varphi \in M^*$ und $\varphi \leq \vartheta|_M$. Dann existiert ein $\Phi \in S(\vartheta)$ mit $\Phi|_M = \varphi$.

Beweis: Zu $\vartheta_\pi \in Sub(E)$ existiert nach dem Satz von HAHN-BANACH ein $\Phi \in E^*$ mit $\Phi \leq \vartheta_\varphi$, also $\Phi \leq \vartheta$ und $\Phi|_M = \varphi$.

3.4 Bemerkung

Durch $p : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \vartheta(x) + \vartheta(-x)$ wird auf E offenbar eine Halbnorm definiert, durch die E zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird. Für $A \subset E$ sei $\overline{A}^\vartheta$ die Hülle von A in dieser Topologie, d.h. $x \in \overline{A}^\vartheta \Leftrightarrow Inf\{p(x-a) : a \in A\} = 0$.

Für das folgende erweist es sich als zweckmäßig, den Linearitätsraum von ϑ einzuführen.

3.5 Definition

$E(\vartheta) := \{x \in E : p(x) = 0\}$.

3.6 Behauptung

1. $E(\vartheta) \subset E$ ist ein Untervektorraum.
2. $E(\vartheta) = \overline{E(\vartheta)}^\vartheta$.
3. Sei $\Theta \in Sub(E)$ mit $\Theta \leq \vartheta$. Dann gilt $\overline{E(\Theta)}^\vartheta = E(\Theta)$.
4. $E(\vartheta) = \{x \in E : \vartheta(x+u) = \vartheta(x) + \vartheta(u)$ für alle $u \in E\}$. Insbesondere ist also ϑ auf $E(\vartheta)$ linear.
5. It $M \subset E$ ein Untervektorraum und $\varphi \in S(\vartheta|_M)$, so gilt $E(\vartheta_\varphi) = \overline{M}^{\vartheta_\varphi}$.

Beweis:

1. Für $x, y \in E(\vartheta)$ beliebig ist $0 \leq p(x+y) \leq p(x) + p(y) = 0$, d.h. $x + y \in E(\vartheta)$; ist ferner $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt $p(\lambda x) = \lambda p(x) = 0$, falls $\lambda \geq 0$ und $p(\lambda x) = (-\lambda)p(-x) = -\lambda p(x) = 0$, falls $\lambda < 0$, also $\lambda x \in E(\vartheta)$.
2. Sei $x \in \overline{E(\vartheta)}^\vartheta$. Dann kommt für alle $u \in E(\vartheta)$ $0 \leq p(x) \leq p(x+u) + p(u) = p(x-u)$, also auch $0 \leq p(x) \leq Inf\{p(x-u) : u \in E(\vartheta)\} = 0$.
3. Ist $x \in \overline{E(\Theta)}^\vartheta$, so gilt für alle $u \in E(\Theta)$: $0 \leq \Theta(x) + \Theta(-x) \leq \Theta(x-u) + \Theta(u) + \Theta(u-x) + \Theta(-u) = \Theta(x-u) + \Theta(u-x) \leq p(x-u)$, mithin $0 \leq \Theta(x) + \Theta(-x) \leq Inf\{p(x-u) : u \in E(\vartheta)\} = 0$.
4. Ist $x \in E(\vartheta)$, so gilt für alle $u \in E$: $2\vartheta(u) \leq \vartheta(u+u) \leq \vartheta(u-x) + \vartheta(u+x) \leq \vartheta(u) + \vartheta(-x) + \vartheta(x) + \vartheta(u) = 2\vartheta(u)$, so dass $2\vartheta(u) = \vartheta(u-x) + \vartheta(x+u)$, mithin
   $\vartheta(x) + \vartheta(u) + \vartheta(-x+u) \leq \vartheta(x) + \vartheta(u) + \vartheta(-x) + \vartheta(u) = 2\vartheta(u) = \vartheta(u-x) + \vartheta(x+u)$, also $\vartheta(x) + \vartheta(u) \leq \vartheta(x+u)$; wenn umgekehrt $\vartheta(x+u) = \vartheta(x) + \vartheta(u)$ für alle $u \in E$ gilt, so folgt insbesondere $\vartheta(x-x) = \vartheta(0) = 0 = \vartheta(x) + \vartheta(-x)$, d.h. $x \in E(\vartheta)$.

5. Ist $x \in E(\vartheta_\varphi)$, so gilt für alle $u \in M$: $0 \leq \vartheta_\varphi(x-u) + \vartheta_\varphi(u-x) \leq \vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(-x) + \vartheta_\varphi(u) + \vartheta_\varphi(-u) = 0 + \varphi(u) + \varphi(-u) = 0$, also $x \in \overline{M}^{\vartheta_\varphi}$.
   Umgekehrt ist für $x \in \overline{M}^{\vartheta_\varphi}$ und alle $u \in M$: $0 \leq \vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(-x) \leq \vartheta_\varphi(x-u)+\vartheta_\varphi(u)+\vartheta_\varphi(u-x)+\vartheta_\varphi(-u) = \vartheta_\varphi(x-u)+\vartheta_\varphi(u-x)+\varphi(u)+\varphi(-u) = \vartheta_\varphi(x-u)+\vartheta_\varphi(u-x)$, so dass $0 \leq \vartheta_\varphi(x)+\vartheta_\varphi(-x) \leq Inf\{\vartheta_\varphi(x-u) + \vartheta_\varphi(u-x) : u \in M\} = 0$ wie behauptet.

Unser Ziel ist es nun, einen Satz zu beweisen, der eine hinreichende Bedingung dafür angibt, dass eine spezielles lineares Funktional φ auf einem Untervektorraum $M \subset E$ mit $\varphi \leq \vartheta|_M$ eindeutig zu $\Phi \in S(\vartheta)$ fortsetzbar ist. Dazu zunächst folgende

3.7 Bemerkung

Sei $a \in E$. Dann ist für alle $x \in E$: $\vartheta_a(x) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\vartheta(a+tx)-\vartheta(a)}{t}$

Beweis: Die Funktion $t \mapsto \vartheta(x+ta) - t\vartheta(a)$ ist für festes $x \in E$ monoton fallend auf $[0,\infty[$; denn sind $s,t \geq 0$, so gilt $\vartheta(x+ta) - \vartheta(x+sa) \leq \vartheta(x+ta-x-sa)+\vartheta(x+sa)-\vartheta(x+sa) = \vartheta([t-s]a) = (t-s)\vartheta(a)$, also $\vartheta(x+ta) - t\vartheta(a) \leq \vartheta(x+sa)-s\vartheta(a)$, folglich $\vartheta_a(x) = Inf\{\vartheta(x+ta) - t\vartheta(a) : t \geq 0\} = \lim\limits_{t\to\infty}(\vartheta(x+ta) - t\vartheta(a)) = \lim\limits_{t\to 0+}(\vartheta(x+t^{-1}a) - t^{-1}\vartheta(a)) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\vartheta(a+tx)-\vartheta(a)}{t}$

3.8 Definition

Für $F \subset E$ konvex und $a \in F$ sei $F_a = \{x \in F :$ Es gibt $y \in F$ und $0 < \lambda < 1$ mit $a = \lambda x + (1-\lambda)y\}$.

3.9 Satz

Seien $F \subset E$ konvex und $\vartheta(x) = 1$ für alle $x \in F$. Dann ist$F_a \subset E(\vartheta_a)$ für alle $a \in F$.

Beweis: Sei $a \in E$ fest.

1. Wir haben $a \in E(\vartheta_a)$ wegen $\vartheta_a(a) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\vartheta(a+ta)-\vartheta(a)}{t} = \vartheta(a)$ und $\vartheta_a(-a) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\vartheta(a-ta)-\vartheta(a)}{t} = -\vartheta(a) = -\vartheta_a(a)$.
2. Sei $x \in F_a$. Wir haben $x - a \in E(\vartheta_a)$ zu zeigen. Nach Voraussetzung existieren ein $0 < \lambda < 1$ und ein $y \in F$ so dass $a = \lambda x+(1-\lambda)y$. Für $-\frac{\lambda}{1-\lambda} < t < 1$ haben wir $0 < \lambda+(1-\lambda)t < 1$, so dass $a+t(x-a) = \lambda x+(1-\lambda)y+t(x-(\lambda x+(1-\lambda)y)) = x(\lambda+t-\lambda t)+y(1-\lambda-(1-\lambda)t) = [\lambda+(1-\lambda)t]x+(1-[\lambda+(1-\lambda)t])y \in F$ wegen $x, y \in F$ und F konvex, also $\vartheta_a(x-a) = 0$. Ein ähnliches Argument schließlich liefert $\vartheta_a(-(x-a)) = 0$, mithin $\vartheta_a(x-a) + \vartheta_a(a-x) = 0$ wie behauptet.

Als Konsequenz des vorstehenden Satzes notieren wir

3.10 Korollar

Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in Satz 3.9. Es bezeichne K den von F erzeugten Kegel $\{\lambda x : x \in F, \lambda > 0\}$. Dann gilt $K \cap (a-K) \subset E(\vartheta_a)$ für alle $a \in F$.

Beweis: Seien $a \in F$ und $x \in K \cap (a - K)$. Wegen a und $0 \in E(\vartheta_a)$ können wir $a \neq x \neq 0$ annehmen. Nach Voraussetzung existieren y_1 und $y_2 \in F$ sowie $r_1, r_2 \geq 0$ mit $x = r_1 y_1 = a - r_2 y_2$, so dass insbesondere $0 < r_1, r_2$. Wir haben dann $y_1 \in E(\vartheta_a)$ zu zeigen. Dazu sei zunächst bemerkt, dass $r_1 + r_2 = 1$ ist; denn aufgrund der Konvexität von F ist $\frac{1}{r_1 + r_2} a = \frac{1}{r_1 + r_2}(r_1 y_1 + r_2 y_2) = \frac{r_1}{r_1 + r_2} y_1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2} y_2 \in F$, mithin $\vartheta(\frac{a}{r_1 + r_2}) = 1$, also $1 = \vartheta(a) = r_1 + r_2$. Hieraus kommt $a = r_1 y_1 + r_2 y_2 = (1 - r_1) y_2 + r_1 y_1$, d.h. $y_1 \in F_a$, also $y_1 \in E(\vartheta_a)$ nach Satz 3.9.

3.11 Bemerkung

Seien $F \subset E$ konvex, und K der von F aufgespannte Kegel. Nach FULLERTON und BRAUNSCHWEIGER [1] heißt $a \in F$ quasiinterner Punkt von F, wenn $\overline{Lin(K \cap (a - K))}^{\vartheta} = E$. Die vorstehenden Überlegungen geben dann den

3.12 Satz

Seien $F \subset E$ konvex, $\vartheta(x) = 1$ für alle $x \in F$ und $a \in F$ quasiinterner Punkt. Dann ist ϑ_a linear.

Beweis: Nach Korollar 3.10 ist $K \cap (a - K) \subset E(\vartheta_a)$, so dass nach Behauptung 3.6

$$\overline{Lin(K \cap (a - K))}^{\vartheta} \subset E(\vartheta_a) \subset E,$$

also nach Voraussetzung $E(\vartheta_a) = E$.

3.13 Korollar (FULLERTON-BRAUNSCHWEIGER)

Sei $M \subset E$ ein Untervektorraum, $\varphi \in S(\vartheta|_M)$. Es sei $F \subset E$ konvex mit $\vartheta(x) = 1$ für alle $x \in F$, und es gebe ein $a \in F \cap M$, a quasiinterner Punkt von F, mit $\varphi(a) = \vartheta(a)$. Dann ist $\varphi = \vartheta_a|_M$, und ϑ_a ist die einzige Fortsetzung Φ von φ auf E mit $\Phi \leq \vartheta$.

Kapitel 4

Eindeutige Fortsetzbarkeit aller linearen Funktionale unterhalb eines sublinearen

Es seien E ein fester Vektorraum über $\mathbb{R}, \vartheta \in Sub(E)$ fixiert sowie $M \subset E$ ein fester Untervektorraum.

Wir stellen uns nun die Frage: Welches ist der größte Untervektorraum U von E, auf den man alle $\varphi \in S(\vartheta|_M)$ eindeutig zu $\Phi \in S(\vartheta|_U)$ fortsetzen kann? Oder anders formuliert: Gesucht ist der größte Untervektorraum U von E mit folgender Eigenschaft: sind $\varphi \in S(\vartheta|_M)$ und $\Phi_1, \Phi_2 \in S(\vartheta)$ mit $\Phi_1|_M = \Phi_2|_M = \varphi$, so gilt $\Phi_1|_U = \Phi_2|_U$.

4.1 Bemerkung

Ist $\varphi \in S(\vartheta|_M)$, so ist $E(\vartheta_\varphi)$ der größte Untervektorraum von E, auf dem alle Fortsetzungen $\Phi \in S(\vartheta)$ von φ übereinstimmen; denn einerseits it $\vartheta_\varphi|_E(\vartheta_\varphi)$ linear nach Behauptung 3.5, so dass φ eindeuting unterhalb ϑ auf $(E(\vartheta_\varphi)$ fortsetzbar ist. Ist andererseits N ein Untervektorraum von E, auf dem alle Fortsetzungen $\Phi \in S(\vartheta)$ von φ übereinstimmen, so bedeutet das, dass es genau ein $\Phi \in N^*$ gibt mit $\Phi \leq \vartheta|_N$ und $\Phi|_M = \varphi$, d.h. es existiert genau ein $\Phi \in N^*$ mit $\Phi \leq \vartheta_\varphi|_N$, oder, äquivalent hierzu: $\vartheta_\varphi|_N$ ist linear; also gilt $\vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(-x) = \vartheta_\varphi(0) = 0$ für alle $N \subset E(\vartheta_\varphi)$ wie behauptet. Hieraus fließt als

4.2 Korollar

$$\bigcap_{\varphi \in S(\vartheta|_M)} E(\vartheta_\varphi)$$

ist der größte Untervektorraum von E, auf den man alle $\varphi \in S(\vartheta|_M)$ eindeutig unterhalb ϑ fortsetzen kann.

Wir wollen diesen Durchschnitt charakterisieren und behaupten

4.3 Satz

$$\overline{M}^{\vartheta} = \bigcap_{\varphi \in S(\vartheta|_M)} E(\vartheta_\varphi)$$

Der Beweis dieses Satzes erfordert folgendes

4.4 Lemma

Seien $r \in \mathbb{N}$ und $x_1, \cdots, x_r \in E$ fixiert. Dann gilt

$$Sup\{\vartheta_\varphi(x_1) + \cdots + \vartheta_\varphi(x_r) : \varphi \in S(\vartheta|_M)\} =$$

$$Inf\{\vartheta(x_1 - u_1) + \cdots + \vartheta(x_r - u_r) : u_1, \cdots, u_r \in M, \sum_{i=1}^{r} u_i = 0\}$$

Beweis: Die Abschätzung $\leq$ ist leicht einzusehen: Seien $u_1, \cdots, u_r \in M$ beliebig mit $u_1 + \cdots + u_r = 0$. Dann gilt für alle $\varphi \in S(\vartheta|_M)$

$$\vartheta_\varphi(x_1) + \cdots \vartheta_\varphi(x_r)$$

$$\leq \vartheta_\varphi(x_1 - u_1) + \cdots + \vartheta_\varphi(x_r - u_r) + \vartheta_\varphi(u_1) + \cdots + \vartheta_\varphi(u_r)$$
$$= \vartheta_\varphi(x_1 - u_1) + \cdots + \vartheta_\varphi(x_r - u_r) + \varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_r)$$

(nach 3.2)

$$= \vartheta_\varphi(x_1 - u_1) + \cdots + \vartheta_\varphi(x_r - u_r) + \varphi(u_1 + \cdots + u_r)$$

$$= \vartheta_\varphi(x_1 - u_1) + \cdots + \vartheta_\varphi(x_r - u_r) \leq \vartheta(x_1 - u_1) + \cdots + \vartheta(x_r - u_r)$$

Zum Beweis der anderen Richtung definieren wir die Funktion

$$\Theta : E^r \to [-\infty, \infty[$$

durch

$$\Theta(y_1, \cdots, y_r) = Inf\{\vartheta(y_1 - u_1) + \cdots + \vartheta(y_r - u_r) : u_i \in M, u_1 + \cdots + u_r = 0\}$$

und behaupten

1. $\Theta \in Sub(E^r)$
2. Für alle $(y_1, \cdots, y_r) \in E^r$ ist $\vartheta(y_1, \cdots, y_r) \leq \Theta(y_1, \cdots, y_r)$
3. $\Theta(y_1, \cdots, y_r) = \vartheta(y_1 + \cdots + y_r)$ für alle $(y_1, \cdots, y_r) \in M^r$. Bezeichnen wir mit N die Menge $\{(y_1, \cdots, y_r) \in M^r : y_1 + \cdots + y_r = 0\}$, so ist insbesondere $\Theta|_N = 0$.

Beweis:

1. Seien $(y_1, \cdots, y_r)$ und $(z_1, \cdots, z_r) \in E^r$. Dann gilt für alle $u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_r \in M$ mit $u_1 + \cdots + u_r = v_1 + \cdots + v_r = 0$:

$$\vartheta(y_1 - u_1) + \cdots + \vartheta(y_r - u_r) + \vartheta(z_1 - v_1) + \cdots + \vartheta(z_r - v_r) \geq$$

$$\vartheta([y_1 + z_1] - [u_1 + v_1]) + \cdots + \vartheta([y_r + z_r] - [u_r + v_r]) > \Theta(y_1 + z_1, \cdots, y_r + z_r),$$

mithin

$$\Theta(y_1, \cdots, y_r) + \Theta(z_1, \cdots, z_r) \geq \Theta(y_1 + z_1, \cdots, y_r + z_r);$$

offenbar gilt außerdem

$$\Theta(\lambda y_1, \cdots, \lambda y_r) = \lambda \Theta(y_1, \cdots, y_r)$$

für alle $\lambda > 0$ und $(y_1, \cdots, y_r) \in E^R$ sowie $\Theta(0, \cdots, 0) = 0$, so dass $\Theta \in Sub(E^r)$ nach Bemerkung 2.2.

2. Sind $(y_1, \cdots, y_r) \in E^r$ und $u_1, \cdots, u_r \in M$ beliebig mit $u_1 + \cdots + u_r = 0$, so folgt

$$\vartheta(y_1 + \cdots + y_r) = \vartheta(y_1 - u_1 + \cdots + y_r - u_r) \leq \vartheta(y_1 - u_1) + \cdots + \vartheta(y_r - u_r),$$

also auch $\vartheta(y_1 + \cdots + y_r) \leq \Theta(y_1, \cdots, y_r)$.

3. Wir haben $\Theta(y_1, \cdots, y_r) \leq \vartheta(y_1 + \cdots + y_r)$ zu zeigen für $(y_1, \cdots, y_r) \in M^r$. Dazu seien $u_1 = -(y_2 + \cdots + y_r)$, $u_2 = y_2, \cdots, u_r = y_r$. Dann sind offenbar die $u_i \in M$ für $1 \leq i \leq r$, und $u_1 + \cdots + u_r = 0$, so dass $\Theta(y_1, \cdots, y_r) \leq \vartheta(y_1 - u_1), + \cdots + \vartheta(y_r - u_r) = \vartheta(y_1 + \cdots + y_r) + \vartheta(y_2 - y_2) \ \cdots + \vartheta/y_r - y_r) = \vartheta(y_1 + \cdots + y_r)$ wie behauptet.

   Sei nun $\Phi \in (E^r)^*, \Phi \leq \Theta$. Dann ist $\Phi(y_1, \cdots, y_r) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(y_i)$ für alle $(y_1, \cdots, y_r) \in E^r$ mit $\varphi_i(y_i) = \Phi(0, \cdots, y_i, \cdots, 0)$ (y_i an Position i), und wir haben $\varphi_i \in E^*$ sowie $\varphi_i \leq \vartheta$ wegen $\varphi_i(y) = \Phi(0, \cdots, y, \cdots, 0) \leq$
   $\Theta(0, \cdots, y, \cdots, 0) \leq \vartheta(y)$ für alle $y \in E$. Da $\Theta|_N = 0$ nach Teil 3. der vorstehenden Behauptung, kommt für alle
   $y \in M : \varphi_i(y) - \varphi_j(y) = \Phi(0, \cdots, y, \cdots, -y, \cdots, 0)$ (y an Position i und -y an Position j), $\leq \Theta(0, \cdots, y, \cdots, -y, \cdots, 0) = 0$ (y an Position i und -y an Position j), mithin $\varphi_i|_M \leq \varphi_j|_M$, also $\varphi_i|_M = \varphi_j|_M$ für alle $1 \leq i, j \leq r$. Setzen wir demnach $\varphi = \varphi_i|_M (1 \leq i \leq r)$,so haben wir $\varphi_i \leq \vartheta_\varphi$ und damit $\Phi(x_1, \cdots, x_r) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{r} \vartheta_\varphi(x_i) \leq Sup\{\sum_{i=1}^{r} \vartheta_\varphi(x_i) : \varphi \in S(\vartheta|_M)\}$.
   Dies gilt nun für alle $\Phi \in S(\Theta)$, so dass nach Bemerkung 2.13 $\Theta(x_1, \cdots, x_r) =$
   $Sup\{\Phi(x_1, \cdots, x_r) : \Phi \in S(\Theta)\} \leq Sup\{\sum_{i=1}^{r} \vartheta_\varphi(x_i) : \varphi \in S(\vartheta|_M)\}$ oder also

   $Inf\{\vartheta(x_1 - u_1) + \cdots + \vartheta(x_r - u_r) : u_i \in M, \sum_{i=1}^{r} u_i = 0\} \leq$

   $Sup\{\sum_{i=1}^{r} \vartheta_\varphi(x_i) : \varphi \in S(\vartheta|_M)\}$, und das war zu zeigen.

Beweis zu Satz 4.3: Sei $x \in \overline{M}^\vartheta$. Dann kommt $0 = Inf\{\vartheta(x-u) + \vartheta(u-x) : u \in M\} = Sup\{\vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(-x) : \varphi \in S(\vartheta|_M)\}$ nach Lemma 4.4, d.h. $\vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(-x) = 0$ für alle $\varphi \in S(\vartheta|_M)$, also

$$x \in \bigcap_{\varphi \in S(\vartheta|_M)} E(\vartheta_\varphi)$$

Ist umgekehrt x aus diesem Durchschnitt, so gilt $0 = Sup\{\vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(-x) : \varphi \in S(\vartheta|_M)\} = Inf\{\vartheta(x-u) + \vartheta(u-x) : u \in M\}$, so dass $x \in \overline{M}^\vartheta$.

4.5 Korollar

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Jedes $\varphi \in S(\vartheta|_M)$ besitzt genau eine Fortsetzung $\Phi \in S(\vartheta)$.
2. $\overline{M}^{\vartheta} = E$.

Kapitel 5

Das Problem der normerhaltenden Fortsetzung und der Satz von GARKAVI

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so können wir jedem stetigen linearen Funktional auf E in bekannter Weise eine Norm zuordnen; ist E sogar ein Hilbertraum, so besagt ein klassischer Satz, dass sich jedes stetige lineare Funktional auf einem Untervektorraum $M \subset E$ auf genau einer Weise unter Beibehaltung seiner Norm zu einem stetigen linearen Funktional auf ganz E fortsetzen lässt. Andererseits zeigt Korollar 4.5 im Fall, dass ϑ eine Norm ist: Ist $M \subset E$ ein Untervektorraum, so besitzen alle linearen Funktionale der Norm ≤ 1 eindeutig bestimmte Fortsetzungen auf ganz E genau dann wenn M in E dicht liegt. Wir stehen also zunächst vor der Aufgabe, ein Äquivalent für den Begriff *Norm eines linearen Funktionals* zu finden. Dabei hilft uns folgende triviale

5.1 Bemerkung

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, so besteht $S(\|\cdot\|)$ genau aus allen linearen Funktionalen $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mit $\|\varphi\| \leq 1$. $S(\|\cdot\|)$ ist konvex und schwach*-kompakt, und die internen Punkte von $S(\|\cdot\|)$ sind genau die Funktionale φ mit $\|\varphi\| < 1$.

Wir beginnen mit

5.2 Definition

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}, \emptyset \neq K \subset E$ konvex. $a \in K$ heißt interner Punkt von K, wenn zu jedem $x \in K$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $a - \epsilon(x - a) \in K$.

Es gilt folgendes

5.3 Lemma

Sei X ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{R}, K \subset X$ konvex und kompakt. Ist $a \in K$ interner Punkt von K, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $a + \epsilon(K - K) \subset K$ (Die Umkehrung hiervon ist trivial).

Beweis: Der Beweis dieses Lemmas gliedert sich in mehrere Schritte.

1. Zu $\epsilon > 0$ bilden wir die Mengen $K(\epsilon) := \{\epsilon \in K : a - \epsilon(x-a) \in K\}$. Offenbar ist $K(\epsilon) \subset K$, und aufgrund der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto a - \epsilon(x-a)$ ist $K(\epsilon)$ abgeschlossen, also kompakt. Ferner haben wir $K(\beta) \subset K(\alpha)$ für $0 < \alpha < \beta$ sowie $K = \bigcup_{\epsilon > 0} K(\epsilon)$ nach Voraussetzung, da $a \in K$ interner Punkt ist. Demnach existiert nach dem Satz von Baire ein $\epsilon > 0$ (owe. $\epsilon < 1$) mit $Int_K K(\epsilon) \neq \emptyset$, d.h. es gibt ein $0 < \epsilon < 1, b \in K(\epsilon)$ sowie eine Nullumgebung U mit $(b + U) \cap K \subset K(\epsilon)$. Schließlich existiert noch ein $0 < t < 1$ mit $t(K - b) \subset U$, da K-b beschränkt ist.

2. Wir behaupten, dass $t(K - K) \subset K(\epsilon) - K(\epsilon)$. Zum Beweis sei $z \in t(K - K)$, d.h. $z = tu - tv$ mit $u, v \in K$. z können wir auch schreiben als $z = (1 - t)b + tu - ((1-t)b + tv)$. Aufgrund der Konvexität von K ist aber $(1-t)b + tu \in K$; ferner gilt $(1 - t)b + tu = t(u - b) + b \in U + b$, so dass $(1 - t)b + tu \in K \cap (U + b)$. Ein ähnliches Argument liefert $(1-t)b+tv \in K \cap (U+b)$, mithin $z = [(1-t)b+tu] - [(1-t)b+tv] \in K \cap (U+b) - K \cap (U+b) \subset K(\epsilon) - K(\epsilon)$ wie behauptet.

3. Wir zeigen $K(\epsilon) - K(\epsilon) \subset \epsilon^-1(1 + \epsilon)(K(\epsilon) - a)$. Sei dazu $x \in K(\epsilon) - K(\epsilon)$, d.h. $x = u - v$ mit $u, v \in K(\epsilon) \subset K$. Demnach sind $p := a - \epsilon(u - a)$ sowie $q := a - \epsilon(v - a) \in K$. Wir behaupten:
$$z := \frac{\epsilon}{1+\epsilon}(u - v) + a \in K(\epsilon).$$
Denn zunächst ist
$$\begin{aligned} z &= a + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}u - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}v \\ &= \frac{\epsilon}{1+\epsilon}u + (a - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}v) \\ &= \frac{\epsilon}{1+\epsilon} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}q \in K \end{aligned}$$
wegen der Konvexität von K und $u, q \in K$. Ferner gilt
$$\begin{aligned} & a - \epsilon(z - a) \\ &= a - \epsilon(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}[u - v]) \\ &= a - \epsilon^2 \frac{1}{1+\epsilon}(u - v) \\ &= a - \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon}u + \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon}v \\ &= a + \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon}v - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}u + \frac{\epsilon - \epsilon^2}{1+\epsilon}u \\ &= \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon}v + \frac{a(1+\epsilon) - \epsilon a}{1+\epsilon} + \frac{\epsilon - \epsilon^2}{1+\epsilon}u \\ &= \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon}v + \frac{1}{1+\epsilon}p + \frac{\epsilon - \epsilon^2}{1+\epsilon}u \in K \end{aligned}$$
als Konvexkombination aus K ($\epsilon < 1$). Hieraus kommt $\frac{\epsilon}{1+\epsilon}(u-v)+a \in K(\epsilon)$, d.h. $\frac{\epsilon}{1+\epsilon} + a \in K(\epsilon)$ oder $x \in \epsilon^-1(1 + \epsilon)(K(\epsilon) - a)$, was zu zeigen war.

4. Zusammenfassend können wir demnach sagen: Es existieren $0 < t, \epsilon < 1$ mit $t(K - K) \subset K(\epsilon) - K(\epsilon) \subset \frac{1+\epsilon}{\epsilon}(K(\epsilon) - a)$, mithin

$$t(K-K) \subset \frac{1+\epsilon}{\epsilon}(K(\epsilon)-a), \text{ d.h. } a+\frac{\epsilon t}{1+\epsilon}(K-K) \subset K(\epsilon) \subset K.$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Es sei nun wieder E ein Vektorraum über $\mathbb{R}, \vartheta \in Sub(E)$ und $M \subset E$ ein Untervektorraum. Wie früher setzen wir $p : x \mapsto \vartheta(x) + \vartheta(-x)$.

5.4 Definition

Es sei $I(\vartheta) \subset S(\vartheta)$ die Menge aller internen Punkte der konvexen Menge $S(\vartheta)$. $R(\vartheta)$ sei $S(\vartheta)\backslash I(\vartheta)$.

Wir wollen nun Lemma 5.3 anwenden und setzen dazu $X = E^*$, versehen mit der schwach*-Topologie, und bemerken, dass nach früherem $S(\vartheta)$ schwach*-kompakt und konvex ist. Es gilt folgendes

5.5 Lemma

Folgende Aussagen sind äquivalent

1. $\alpha \in I(\vartheta)$
2. Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $x \in E$ gilt: $\alpha(x) \leq \vartheta(x) - \epsilon p(x)$.

Beweis: Es sei $\alpha \in I(\vartheta)$. Nach Lemma 5.3 existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\alpha + \epsilon(S(\vartheta) - S(\vartheta)) \subset S(\vartheta)$, d.h. für alle $\varphi, \psi \in S(\vartheta)$ ist $\alpha+\epsilon(\varphi-\psi) \in S(\vartheta)$ oder $\alpha+\epsilon(\varphi-\psi) \leq \vartheta$, also $\alpha(x) + \epsilon(\varphi(x) - \psi(x)) \leq \vartheta(x)$ für alle $x \in E$, mithin $\alpha(x) + \epsilon(\vartheta(x) + \vartheta(-x)) \leq \vartheta(x)$ und hieraus $\alpha(x) \leq \vartheta(x) - \epsilon p(x)$ für alle $x \in E$.

Gebe es umgekehrt ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $x \in E$ $\alpha(x) \leq \vartheta(x) - \epsilon p(x)$. Dann ist $\alpha \leq \vartheta$, d.h. $\alpha \in S(\vartheta)$. Sind ferner $\varphi \in S(\vartheta), x \in E$, so kommt $\alpha(x) - \varphi(x) = \alpha(x) + \varphi(-x) \leq \vartheta(x) + \vartheta(-x) = p(x)$, also $\alpha(x) \leq \vartheta(x) - \epsilon p(x) \leq \vartheta(x) - \epsilon(\alpha(x) - \varphi(x))$, d.h. $\alpha(x) + \epsilon(\alpha(x) - \varphi(x)) \leq \vartheta(x)$, mithin $\alpha(x) - \epsilon(\varphi(x) - \alpha(x)) \leq \vartheta(x)$ oder $\alpha - \epsilon(\varphi - \psi) \in S(\vartheta)$.

In der Einleitung zu diesem Kapitel hatten wir bemerkt, dass, falls ϑ eine Norm ist, $S(\vartheta)$ stets interne Punkte besitzt. Folgender Satz nun gibt ein Kriterium dafür an, wann im allgemeinen Falle $S(\vartheta)$ interne Punkte enthält.

5.6 Satz

Es ist $I(\vartheta) \neq \emptyset$ genau dann wenn existiert ein $\epsilon > 0$ mit

$$\epsilon \sum_{i=1}^{n} \vartheta(x_i) - (1-\epsilon) \sum_{i=1}^{n} \vartheta(-x_i) \leq \vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

für alle $x_1, \cdots, x_n \in E$.

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $\alpha \in I(\vartheta)$. Nach dem vorstehenden Lemma existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\vartheta(x) - \alpha(x) \geq \epsilon p(x)$ für alle $x \in E$. Sind nun $x_1, \cdots, x_n \in E$, so folgt $\alpha(-x_i) \leq \vartheta(-x_i) - \epsilon(\vartheta(-x_i) + \vartheta(x_i))$, also $\alpha(-x_i) \leq (1-\epsilon)\vartheta(-x_i) - \epsilon\vartheta(x_i)$ für alle

$1 \leq i \leq n$, so dass $-\vartheta(\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq \alpha(-\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq (1-\epsilon)\sum_{i=1}^{n} \vartheta(-x_i) - \epsilon(\sum_{i=1}^{n} \vartheta(x_i)$ oder $\epsilon \sum_{i=1}^{n} \vartheta(x_i) - (1-\epsilon)\sum_{i=1}^{n} \vartheta(-x_i) \leq \vartheta(\sum_{i=1}^{n} x_i)$. Zum Beweis der anderen Implikation benötigen wir folgendes

5.7 Lemma

Sei $F : E \to \mathbb{R}$ eine positiv homogene Funktion. Dann existiert ein $\varphi \in E^*$ mit $\varphi(x) \leq F(x)$ für alle $x \in E$ genau dann wenn $\sum_{i=1}^{n} F(x_i) \geq 0$ immer wenn $x_1, \cdots, x_n \in E$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Beweis: Sei $\varphi \in E^*$ mit $\varphi(x) \leq F(x)$ für alle $x \in E$. Seien ferner $x_1, \cdots, x_n \in E$ mit $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Dann ist $0 = \varphi(x_1 + \cdots + x_n) = \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n) \leq F(x_1) + \cdots + F(x_n)$. Wir nehmen umgekehrt an, das Kriterium sei erfüllt. Für $x \in E$ sei $\Theta(x) = Inf\{\sum_{n=1}^{n} F(x_i) : n \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_n \in E, x_1 + \cdots + x_n = x\}$. Θ ist offensichtlich positiv homogen, $\Theta(x) \leq F(x)$ für alle $x \in E$ sowie $\Theta(0) = 0$ nach Voraussetzung. Ferner ist Θ subadditiv, denn sind $x, y \in E$ beliebig und $x = x_1 + \cdots + x_n, y = y_1 + \cdots + y_m$, so kommt $F(x_1) + \cdots + F(x_n) + F(y_1) + \cdots + F(y_m) \geq \Theta(x+y)$ wegen $x + y = x_1 + \cdots + x_n + y_1 + \cdots + y_m$, so dass auch $\Theta(x) + \Theta(y) \geq \Theta(x+y)$. Nach Bemerkung 2.2 folgt $\Theta \in Sub(E)$, mithin existiert ein $\varphi \in S(\Theta)$ nach HAHN-BANACH, und es ist $\varphi \leq F$ wegen $\Theta \leq F$.

Wir sind nun in der Lage,, die umgekehrte Implikation von Satz 5.6 zu beweisen. Dazu setzen wir die Ungleichung voraus. Sei $F : E \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = (1-\epsilon)\vartheta(x) - \epsilon\vartheta(-x)$. Wegen $\vartheta \in Sub(E)$ ist F positiv homogen; sind $x_1, \cdots, x_n \in E$ mit $x_1 + \cdots + x_n = 0$, so gilt $\sum_{i=1}^{n} F(x_i) = (1-\epsilon)\sum_{i=1}^{n} \vartheta(x_i) - \epsilon \sum_{i=_1}^{n} \vartheta(-xi) \geq -\vartheta(-\sum_{i=1}^{n} x_i) = 0$ nach Voraussetzung. Nach obigem Lemma existiert also ein $\alpha \in E^*$ mit $\alpha(x) \leq F(x)$ für alle $x \in E$, d.h. für alle $x \in E$ kommt $\alpha(x) \leq (1-\epsilon)\vartheta(x) - \epsilon\vartheta(-x) = \vartheta(x) - \epsilon p(x)$ oder $\alpha \in I(\vartheta)$ nach Lemma 5.5.

Im folgendem Satz werden wir sehen, dass die Frage nach der eindeutigen Fortsetzbarkeit aller $\varphi \in S(\vartheta|_M)$ geklärt ist, wenn man weiß, dass ein interner Punkt $\alpha \in I(\vartheta|_M)$ bereits eindeutig unterhalb ϑ auf E fortsetzbar ist.

5.8 Satz

Ist $\alpha \in I(\vartheta|_M)$, dann ist $\overline{M}^{\vartheta} = E(\vartheta_\alpha)$.

Beweis: Wegen

$$\overline{M}^{\vartheta} = \bigcap_{\varphi \in S(\vartheta|_M)} E(\vartheta_\varphi) \subset E(\vartheta_\alpha)$$

haben wir noch die Inklusion $E(\vartheta_\alpha) \subset \overline{M}^{\vartheta}$ zu zeigen. Sei also $x \in E(\vartheta_\alpha)$. Dann gilt für alle $u, v \in M$ $\vartheta(x+u) - \alpha(u) + \vartheta(-x+v) - \alpha(v) = \vartheta(x+u) + \vartheta(-x+v) - \alpha(u+v) \geq$

$\vartheta(x+u)+\vartheta(-x+v)-\vartheta(u+v)+\epsilon(\vartheta(u+v)+\vartheta(-u-v))$

- wobei ϵ nach Lemma 5.5 gewählt ist -

$= \vartheta(x+u)+\vartheta(-x+v)-\vartheta(u+v)+\epsilon\vartheta(u+v)+\epsilon\vartheta(-u-v)$
$\geq \epsilon(\vartheta(x+u)+\vartheta(-x+v)-\vartheta(u+v)+\epsilon\vartheta(u+v)+\epsilon\vartheta(-u-v)$
(wegen $\vartheta(x+u)+\vartheta(-x+v)-\vartheta(u+v)\geq 0$)
$= \epsilon\vartheta(x+u)+\epsilon\vartheta(-x+v)+\epsilon\vartheta(-u-v)$
$\geq \epsilon\vartheta(x+u)+\epsilon\vartheta(-x+v-u-v)$
$= \epsilon(\vartheta(x+u)+\vartheta(-x-u))$
$\geq \epsilon\cdot Inf\{\vartheta(x-z)+\vartheta(z-x) : z\in M\}$.

Hieraus kommt $0=\vartheta_\alpha(x)+\vartheta_\alpha(-x)\geq \epsilon\cdot Inf\{\vartheta(x-z)+\vartheta(z-x) : z\in M\}\geq 0$, also $0=Inf\{\vartheta(x-z)+\vartheta(z-x) : z\in M\}$, was zu zeigen war.

5.9 Korollar

Ist ein $\alpha\in I(\vartheta|_M)$ eindeutig unterhalb ϑ auf ganz E fortsetzbar, so auch jedes $\varphi\in S(\vartheta|_M)$.

Aufgrund dieses Korollars werden wir also im folgenden nur die eindeutige Fortsetzbarkeit der nichtinternen Punkte $\varphi\in S(\vartheta|_M)$ zu untersuchen haben.
Nach Bemerkung 4.1 ist

$$D_R := \bigcap_{\varphi\in R(\vartheta|_M)} E(\vartheta_\varphi)$$

der größte Unterrraum von E, auf den sich alle nichtinternen Punkte von $S(\vartheta|_M)$ eindeutig unterhalb ϑ fortsetzen lassen. Nur in speziellen Fällen gelingt es, den Raum D_R einfacher zu beschreiben.

5.10 Satz

Seien $K\subset S(\vartheta|_M)$ und $T\subset Sub(E)$ eine Teilemenge von sublinearen Funktionalen mit $\Theta\leq\vartheta$ für alle $\Theta\in T$. Dann gilt

1. Ist $S(\vartheta|_M)\subset K$ für alle $\Theta\in T$, so folgt

$$\bigcap_{\varphi\in K} E(\vartheta_\varphi)\subset\bigcap_{\Theta\in T}\overline{M}^\Theta$$

2. Existiert zu jedem $\varphi\in K$ ein $\Theta\in T$ mit $\vartheta_\varphi\leq\Theta$, so ist

$$\bigcap_{\Theta\in T}\overline{M}^\Theta\subset\bigcap_{\varphi\in K} E(\vartheta_\varphi)$$

Sind insbesondere beide Bedingungen erfüllt, so sind die Durchschnitte gleich.

Beweis:

1. Sei $x\in E(\vartheta_\varphi)$ für alle $\varphi\in K$, und sei $\Theta\in T$. Wir haben folgendes zu zeigen: Sind $\varphi\in S(\Theta|_M), \Phi_1,\Phi_2\in S(\Theta)$ und $\Phi_K|_M=\varphi$ für $k=1,2$, so ist $\Phi_1(x)=\Phi_2(x)$ (dann ist x nämlich ein Element des größten Raumes, auf den alle $\varphi\in S(\Theta|_M)$ eindeutig unterhalb Θ fortsetzbar sind, also $x\in\overline{M}^\Theta$). Seien demnach $\varphi\in S(\Theta|_M)$, mithin $\varphi\in K$ nach Voraussetzung, und $\Phi_1,\Phi_2\in S(\Theta)$

Fortsetzungen von φ. Dann haben wir $\Phi_1, \Phi_2 \in S(\vartheta)$ wegen $\Theta \leq \vartheta$ und damit $\Phi_1, \Phi_2 \leq \vartheta_\varphi$, woraus $\Phi_1, \Phi_2 \leq \vartheta_\varphi$, woraus $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$ aufgrund der Voraussetzung folgt.

2. Seien $x \in \overline{M}^\Theta$ für alle $\Theta \in T$ und $\varphi \in K$ beliebig; nach Voraussetzung existiert dann ein $\Theta \in T$ mit $\vartheta_\varphi \leq \Theta$, so dass für alle $u \in M$ gilt
$0 \leq \vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(-x)$
$\leq \vartheta_\varphi(x-u) + \vartheta_\varphi(u-x)$
$\leq \Theta(x-u) + \Theta(u-x)$,
also auch $0 \leq \vartheta_\varphi(x) + \vartheta_\varphi(-x) \leq Inf\{\Theta(x-u) + \Theta(u-x) : u \in M\}$,
d.h. $x \in E(\varphi_\varphi)$.

5.11 Definition

Wir sagen, $\varphi \in S(\vartheta|_M)$ habe die Eigenschaft (N), wenn ein $a \in M$ existiert mit $p(a) = \vartheta(a) + \vartheta(-a) = 1$ und $\vartheta(a) = \varphi(a)$. Insbesondere ist jedes φ mit der Eigenschaft (N) ein Element von $R(\vartheta|_M)$, denn für alle $\epsilon > 0$ ist $\varphi(a) = \vartheta(a) > \vartheta(a) - \epsilon p(a)$.

5.12 Definition

Sei

$$D_R^+ := \bigcap_{\varphi \in R(\vartheta|_M),\ \varphi\ hat\ (N)} E(\vartheta_\varphi)$$

der größte Unterraum von E, auf den sich alle $\varphi \in R(\vartheta|_M)$ eindeutig unterhalb ϑ fortsetzen lassen. Dann haben wir

5.13 Korollar

$$D_R^+ = \bigcap_{a \in M,\ p(a)=1} \overline{M}^{\vartheta_a}$$

Beweis: Wir setzen $K = \{\varphi \in R(\vartheta|_M) : \varphi \text{ erfüllt (N)}\}$ und nehmen $T = \{\vartheta_a : a \in M, p(a) = 1\}$. Nach Behauptung 2.8 kommt demnach $S(\vartheta|_M) \subset K$ für alle $\vartheta_a \in T$, so dass 1. im vorstehenden Satz gilt. Die Voraussetzung 2. ist aber ebenfalls erfüllt, denn ist $\varphi \in K$, so existiert ein $a \in M$ mit $\varphi(a) = \vartheta(a), p(a) = 1$, so dass für alle $x \in E$ gilt:

$\vartheta_\varphi(x) = Inf\{\vartheta(x+u) - \varphi(u) : u \in M\}$
$\leq Inf\{\vartheta(x+ta) - \varphi(ta) : t > 0\}$
$= Inf\{\vartheta(x+ta) - t\vartheta(a) : t \geq 0\}$
$= \vartheta_a(x)$.

Satz 5.11 liefert also

$$\bigcap_{a \in M, p(a)=1} \overline{M}^{\vartheta_a} = \bigcap_{\varphi \in R(\vartheta|_M), \varphi\ hat(N)} E(\vartheta_\varphi) = D_R^+,$$

was zu zeigen war.

5.14 Korollar

Sei $M \subset E$ ein Untervektorraum, und jedes $\varphi \in R(\vartheta|_M)$ habe die Eigenschaft (N). Dann lässt sich jedes $\varphi \in R(\vartheta|_M)$ eindeutig unterhalb ϑ auf ganz E fortsetzen genau dann, wenn $\overline{M}^{\vartheta_a} = E$ für alle $a \in M$ mit $p(a) = 1$.

5.15 Bemerkung

Seien $\Theta \in Sub(E)$ und $M \subset E$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum. Dann ist $\overline{M}^{\Theta} = M + E(\Theta)$. Denn $M + E(\Theta) \subset \overline{M}^{\Theta}$ ist trivial. Ist umgekehrt $x \in \overline{M}^{\Theta}$, dann existieren $x_n \in M$ mit $\Theta(x_n - x) + \Theta(x - x_n) := p(x_n) \to 0$ bei $n \to \infty$. Die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden also eine Cauchyfolge auf M in der Halbnorm p, konvergieren also in p gegen ein $y \in M$ wegen dim M $< \infty$. Dann aber ist $x - y \in E(\Theta)$, denn $p(x-y) \leq p(x-x_n)+p(x_n-y) \to 0$ bei $n \to \infty$, so dass $x = y+(x-y) \in M+E(\Theta)$.

5.16 Lemma

Sei $M \subset E$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum. Dann existiert zu jedem $\varphi \in R(\vartheta|_M)$ ein $a \in M$ mit $\vartheta(a) + \vartheta(-a) = 1$ und $\varphi(a) = \vartheta(a)$.

Beweis: Sei $\varphi \in R(\vartheta|_M)$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf M mit $p(x_n) = 1$ und $\vartheta(x_n) - \varphi(x_n) \to 0$ bei $n \to \infty$. Da dim M $< \infty$, können wir ohne wesentliche Einschränkung annehmen, dass ein $a \in M$ existiert mit $p(x_n - a) \to 0$ bei $n \to \infty$. Wir haben dann $p(a) = 1$, und

$0 \leq \vartheta(a) - \varphi(a)$
$\leq \vartheta(a - x_n) + \vartheta(x_n) - \varphi(a)$
$= \vartheta(a - x_n) + \vartheta(x_n) + \varphi(x_n - a) - \varphi(x_n)$
$\leq \vartheta(a - x_n) + \vartheta(x_n - a) + \vartheta(x_n) - \varphi(x_n)$
$= p(a - x_n) + \vartheta(x_n) - \varphi(x_n) \to 0$ bei $n \to \infty$, also $\varphi(a) = \vartheta(a)$.

Zusammenfassend erhalten wir folgenden

5.17 Satz von GARKAVI

Seien $\vartheta \in Sub(E), M \subset E$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Dann lässt sich jedes $\varphi \in R(\vartheta|_M)$ eindeutig zu $\Phi \in S(\vartheta)$ fortsetzen genau dann wenn $M + E(\vartheta_a) = E$ für alle $a \in M$ mit $\vartheta(a) + \vartheta(-a) = 1$.

Kapitel 6

Zwei Gegenbeispiele

Im vorstehenden Kapitel haben wir die Ungleichungen

$$\overline{M}^{\vartheta} \subset D_R \subset D_R^+ \subset E$$

erhalten. Im ersten Beispiel wollen wir zeigen, dass im Allgemeinen $D_R \neq D_R^+$ ist. Dazu sei $E = c_0$ der Vektorraum aller reellen Nullfolgen, normiert durch $\vartheta(x) = \|x\| = Max\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$ mit $x = (x_1, x_2, \cdots) \in c_0$. Für $a \in E, \|a\| = 1$ sei $N(a) = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| = 1\}$. Dann ist $N(a) \neq \emptyset$, und N(a) enthält nur endlich viele Elemente. Unter ϵ wollen wir die Vorzeichenfunktion verstehen, d.h. $\epsilon(t) = 1$ für $t > 0$ und $\epsilon(t) = -1$ für $t < 0$. Zunächst behaupten wir, dass für $a \in E$ mit $\|a\| = 1$ gilt: $\vartheta_a(x) = Max\{\epsilon(a_i)x_i : i \in N(a)\}$ für alle $x \in E$.

Beweis: Für alle $x \in E$ ist nach Bemerkung 3.7

$$\vartheta_a(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{\|a + tx\| - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{Max\{|a_i + tx_i| : i \in \mathbb{N}\} - 1}{t}$$

Wir behaupten, dass wir uns bei der Maximumsbildung auf solche $i \in \mathbb{N}$ beschränken können, mit $i \in N(a)$. Dazu zeigen wir, dass für hinreichend kleines $t > 0$ $|a_j + tx_j| \leq |a_i + tx_i|$ für alle $x \in N(a)$ und alle $j \notin N(a)$. Denn die Ungleichung ist äquivalent zu $a_j^2 + 2tx_j a_j + t^2 x_j^2 \leq a_i^2 + 2ta_i x_i + t^2 x_i^2$, also mit $2t(a_j x_j - a_i x_i) + t^2(x_j^2 - x_i^2) \leq a_i^2 - a_j^2$. Da nun $a_1^2 - a_j^2 = 1 - a_j^2 \geq \gamma > 0$ für alle $j \notin N(a)$, und da a bzw. x als Nullfolgen beschränkt sind, ist sicherlich für hinreichend kleines $t > 0$

$$2t(a_j x_j - a_i x_i) + t^2(x_j^2 - x_i^2) \leq \gamma \leq a_i^2 - a_j^2,$$

womit die Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Demnach ist also

$$\vartheta_a(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{Max\{|a_i + tx_i| : i \in N(a)\} - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0+} Max\{\frac{|a_i + tx_i| - 1}{t} : i \in N(a)\}$$

$$= Max\{\lim_{t \to 0+} \frac{|a_i + tx_i| - 1}{t} : i \in N(a)\}$$

$$= Max\{\epsilon(a_i)x_i : i \in N(a)\}.$$

Hieraus folgt $x \in E(\vartheta_a)$ genau dann wenn

$$Max\{\epsilon(a_i)x_i : i \in N(a)\} + Max\{-\epsilon(a_i)x_i : i \in N(a)\} = 0,$$

d.h.

$$Max\{\epsilon(a_i)x_i : i \in N(a)\} - Min\{\epsilon(a_i)x_i : i \in N(a)\} = 0,$$

d.h.

$$Max\{\epsilon(a_i)x_i : i \in N(a)\} = Min\{\epsilon(a_i)x_i : i \in N(a)\},$$

d.h. es existiert ein $c = c(x) \in \mathbb{R}$ so dass $\epsilon(a_i)x_i = c$ bzw. $x_i = \epsilon(a_i)c$ gilt für alle $i \in N(a)$.

ist $\mu \in l^1$ ein beschränktes lineares Funktional auf c_0, so ist $M = \{x \in E : \mu(x) = 0\}$ mindestens eine abgeschlossene Hyperebene, so dass für jedes $a \in M$ mit $\|a\| = 1$ entweder $E(\vartheta_a) \subset M$ oder $E = M + E(\vartheta_a) = \overline{M}^{\vartheta_a}$. Ist nun $a \in M$ mit $\|a\| = 1$ und $E(\vartheta_a) \subset M$, so folgt $\mu(x) = 0$ für alle $x \in E(\vartheta_a)$, d.h. $\sum_{i \notin N(a)} \mu_i x_i + \sum_{i \in N(a)} \mu_i x_i = 0$, also $\mu_i = 0$ für alle $i \notin N(a)$. Wählen wir daher $\mu = (-1, 2^{-1}, 2^{-2}, \cdots) \in l^1$, so ist also $E = \overline{M}^{\vartheta_a}$ für alle $a \in M$ mit $\|a\| = 1$, mithin $D_r^+ = E$.

Definieren wir andererseits $\varphi : M \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x_1, x_2, \cdots) = x_1$,so ist offenbar $\varphi \in S(\vartheta|_M)$. Betrachten wir für $n \geq 2$ die Punkte $x_n = (1 - 2^{1-n}, 1, \cdots, 1, 0, \cdots)$ (die hintere 1 an Position n), so haben wir $x_n \in c_0, \mu(x_n) = \mu(1-2^{1-n}, 1, \cdots, 1, 0, \cdots) = 2^{1-n} - 1 + (2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{1-n}) = 0$, d.h. $x_n \in M$; ferner ist $\|x_n\| = 1$ und $\varphi(x_n) = 1 - 2^{1-n} \to 1$ bei $n \to \infty$, so dass sogar $\varphi \in R(\vartheta|_M)$.
Wir haben zu zeigen, dass φ zwei verschiedene Fortsetzungen unterhalb ϑ auf ganz c_0 besitzt. Eine solche Fortsetzung ist offenbar das Funktional: $\lambda = (1, 0, 0, \cdots) \in l^1$. Aber auch das Funktional $\lambda + \mu \in l^1$ ist Fortsetzung von φ wegen $(\lambda+\mu)(x) = \lambda(x) + \mu(x) = \lambda(x) = x_1 = \varphi(x)$ für alle $x \in M$, und schließlich ist $\|\lambda+\mu\| = \sum_{n=2}^{\infty} 2^{1-n} = 1$, was zu zeigen war.

Aus Definition 5.12 folgt unmittelbar: Besitzt jedes $\varphi \in R(\vartheta|_M)$ die Eigenschaft (N), so ist $D_R = D_R^+$. Das folgende Beispiel zeigt, dass durchaus $D_R = D_R^+$ sein kann, ohne dass jedes $\varphi \in R(\vartheta|_M)$ die Eigenschaft (N) hat. Dazu sei E = c der Raum aller konvergenten reellen Zahlenfolgen, normiert durch die Supremumsnorm $\vartheta(x) = \|x\| = Sup\{|x_n| : x \in \mathbb{N}\}$. Sei $M = c_0$ der Unterraum aller Nullfolgen. Bekannt ist, dass $c^* \cong l^1$ vermittels der Isomorphie

$$\varphi \in c^* \Leftrightarrow \exists(\lambda_0, \lambda_1, \cdots) \in l^1 \ mit \ \varphi(x) = \lambda_0 \cdot lim\ x + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \ (\forall_{x \in E}).$$

Es ist dann $\|\varphi\| = \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|$. Ferner ist bekannt, dass $c_0^* \cong l^1$ aufgrund der Isomorphie

$$\varphi \in c_0^* \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \in l^1 \ mit \ \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \ (\forall_{x=(x_1,x_2,\cdots) \in c_0});$$

dann ist $\|\varphi\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$. Wir zeigen zunächst, dass $D_R = E$ ist, also insbesondere $D_R = D_R^+$. Sei dazu $\varphi \in c_0^*$ mit der Norm 1, so dass ein $\lambda \in l^1$ existiert mit

$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| = 1$ und $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ für alle $x = (x_1, x_2, \cdots) \in c_0$. Seien Φ_1, Φ_2 normerhaltende Fortsetzungen von φ auf c. Also existieren $(\mu_1, \mu_2, \cdots) \in c^*$ sowie $(\xi_0, \xi_1, \cdots) \in c^*$ mit $\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i x_i + \mu_0 \ lim\ x$ und $\Phi_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i + \xi_0 \ lim\ x$ für alle $x = (x_1, x_2, \cdots) \in c$. Es folgt sofort $\lambda_i = \mu_i = \xi_i$ für alle $i \geq 1$, und aus $\|\Phi_1\| = \sum_{i=0}^{\infty} |\mu_i| = \sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i| = \|\Phi_2\| = \|\varphi\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| = 1$ kommt $\mu_0 = \xi_0 = 0$, also $\Phi_1 = \Phi_2$. Andererseits ist $\varphi = (2^{-n})_{n \in \mathbb{N}} \in R(\vartheta | c_0)$, und für alle $x \in c_0, \|x\|$=ist $\varphi(x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-1} + Sup\{|x_i| : i \geq n\} \cdot \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} < 1$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$, so dass φ nicht die Eigenschaft (N) erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] R.E FULLERTON AND C.C. BRAUNSCHWEIGER: *Quasi-interior points and the extension of linear functionals.* Math. Annalen 162, pp. 214-224 (1966)

[2] E.T POULSEN: *Eindeutige Hahn-Banach-Erweiterungen.* Math. Annalen 162, pp. 225-227 (1966)

[3] H. KÖNIG: *Über das von Neumannsche Minimax-Theorem.* Arch Math. Vol. XIX 1968, pp. 482-487 (1968)

[4] A.L. GARKAVI: *On uniqueness of solution of the L-problem of moments.* Izv. Akad. Nauk S.S.S.R. Ser. Mat. 28, pp. 553-570 (1964)

[5] R. KAUFMAN: *Interpolation of additive functionals.* Studia Methamatica T. XXVII 1966, pp. 269-272 (1966)