Einfache Beispiele für die Ermittlung der Messunsicherheit nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

(von B. Stabel, Techniker im Physikalischen Praktikum an der RPTU)

Vereinfacht gilt:

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2 + \dots}$$

- U ist die Meßgröße, ΔU ist die ermittelte Unsicherheit nach Fehlerfortpflanzung.
- Δx, Δy, Δz usw. sind die von Euch bestimmten Messunsicherheiten am Experiment.

Beispiel Fadenpendel

Berechnung von g

$$U \mathrel{\widehat{=}} g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2}$$

- Δl und ΔT sind die von Euch bestimmten Messunsicherheiten am Experiment.

Berechnung der partiellen Ableitungen

Partielle Ableitung nach l

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right) \\ &= \frac{\partial\left(4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2}\right)}{\partial l} \\ &= \frac{4\pi^2}{T^2}\end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach T

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right) \\
&= \frac{\partial\left(4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2}\right)}{\partial T} \\
&= 4\pi^2 \cdot l \cdot (-2) \cdot T^{-3} \\
&= -\frac{8\pi^2 \cdot l}{T^3}
\end{aligned}$$

Einsetzen in Grundformel

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 \cdot l}{T^3} \cdot \Delta T\right)^2} \\
&= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sqrt{(\Delta l)^2 + \left(\frac{2l}{T}\right)^2 \cdot (\Delta T)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel kinetische Energie

Berechnung von W_{kin}

$$
\begin{aligned}
U \mathrel{\widehat{=}} W_{kin} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{s^2}{t^2}
\end{aligned}
$$

- Δm, Δs und Δt sind die von Euch bestimmten Messunsicherheiten am Experiment.

Berechnung der partiellen Ableitungen

Partielle Ableitung nach m

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial m}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{t^2}
\end{aligned}
$$

Partielle Ableitung nach s

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial s}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot \frac{s}{t^2} \\
&= \frac{m \cdot s}{t^2}
\end{aligned}
$$

Partielle Ableitung nach t

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) &= \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (-2) \cdot \frac{s^2}{t^3} \\
&= -\frac{m \cdot s^2}{t^3}
\end{aligned}
$$

Einsetzen in Grundformel

$$\Delta W_{kin} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{t^2} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{m \cdot s}{t^2} \cdot \Delta s\right)^2 + \left(-\frac{m \cdot s^2}{t^3} \cdot \Delta t\right)^2}$$
$$= \frac{s}{t^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot s \cdot \Delta m\right)^2 + (m \cdot \Delta s)^2 + \left(-\frac{m \cdot s}{t} \cdot \Delta t\right)^2}$$