Algebraische ausgezeichnete Deformationen in der Ebene

Von Marko Roczen und Gerhard Pfister in Berlin

(Eingegangen am 21. 10. 1974)

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper beliebiger Charakteristik. Wir wollen in unserer Arbeit nachweisen, daß für jeden singulären Punkt des k^2 eine Deformation existiert, für die der Punkt in einer Etalüberlagerung des k^2 in einfache Punkte zerfällt. Dazu wird eine leicht überschaubare Klasse ausgezeichneter Deformationen betrachtet, die die gewünschte Konstruktion ermöglichen. Grundlage der expliziten Rechnung ist eine algebraische Version des Hironakaschen Vorbereitungssatzes. Wir folgen der Idee von J. Briancon und A. Galligo, die in [1] den analogen Fall für analytische Algebren betrachtet haben.

Bezüglich der Eigenschaften Henselscher Ringe und strenger Etalumgebungen verweisen wir auf [4].

1. Standardbasen eines Ideals im algebraischen Potenzreihenring $k\langle X, Y\rangle$

1.1. Definition. Sei $0 \neq f \in k\langle X, Y\rangle$, so definieren wir den vertikalen Anfangsexponenten $E(f) = (i, j) \in N^2$ für $f = \Sigma a_{kl} X^k Y^l$ durch

$$i = \text{Minimum } (s \in N,\ a_{sj} \neq 0 \text{ für ein } j \in N)$$
$$j = \text{Minimum } (t \in N,\ a_{it} \neq 0).$$

Für ein Ideal I sei $E(I) = \{E(f), f \in J, f \neq 0\}$ die Menge der ausgezeichneten Exponenten; offenbar ist sie von der Form

$$E(I) = \bigcup_{i=1}^{s} (\alpha_i, \beta_i) + N^2,$$

und wählen wir das Erzeugendensystem dieser Halbgruppe minimal, so ist bei geeigneter Numerierung stets

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_s$$
$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_s.$$

Nun existieren Elemente $f_i \in I$ mit $E(f_i) = (\alpha_i, \beta_i)$, so daß $f_i = X^{\alpha_i} \cdot g_i$ ist mit einem Weierstraßpolynom g_i vom Grad β_i in Y. Wir nennen dann $(f_1, \ldots, f_s)$

eine vertikale Standardbasis für I. Eine Potenzreihe $r = \Sigma r_{ij} X^i Y^j$ nennen wir reduziert bezüglich $E(I)$, falls $r_{ij} = 0$ ist für $(i, j) \in E(I)$. Um die Definition des Begriffs „Standardbasis" zu rechtfertigen, zeigen wir sofort, daß die so gewählten $f_1, \ldots, f_s$ stets das Ideal I erzeugen.

1.2. Satz. *Jedes $h \in k\langle X, Y\rangle$ besitzt eine eindeutige Darstellung*

$$h = \sum_{i=1}^{s} Q_i f_i + R$$

mit einer $E(I)$-reduzierten Potenzreihe R und Potenzreihen Q_i, die für $i < s$ Polynome in Y sind mit $\deg_Y Q_i < \beta_{i+1} - \beta_i$. Wir schreiben $R = \mathrm{red}_I(h)$, so hat nun offenbar die Surjektion

$$\mathrm{red}_I\colon A \to \mathrm{red}_I(A) \quad (A = k\langle X, Y\rangle)$$

von k-Vektorräumen den Kern I.

Beweis. Wir wenden wiederholt den klassischen WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz an. Sei $h = h_s + r_s$ mit $x^{\alpha_s} | h_s$ und so, daß X^{α_s} keinen Term von r_s teilt. Dann ist insbesondere r_s bezüglich $E(I)$ reduziert. Nun schreiben wir $h_s = Q_s f_s + h_s'$ mit $\deg_Y h_s' < \beta_s$. Sei wiederum $h_s' = h_{s-1} + r_{s-1}$ mit $X^{\alpha_{s-1}} | h_{s-1}$, $X^{\alpha_{s-1}}$ teile keinen Term von r_{s-1} (also r_{s-1} $E(I)$-reduziert). Weiter sei $h_{s-1} = Q_{s-1} f_{s-1} + h'_{s-1}$, $\deg_Y h'_{s-1} < \beta_{s-1}$, wobei offenbar $\deg_y(Q_{s-1}) + \beta_{s-1} < \beta_s$ ist. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhalten wir $h = Q_s f_s + Q_{s-1} f_{s-1} + \cdots + Q_1 f_1 + (r_s + \cdots + r_1 + h_1')$, und wenn wir die in der Klammer stehende Summe mit R bezeichnen, so erhalten wir die behauptete Zerlegung. Die Eindeutigkeit ist leicht zu zeigen.

Eine Anwendung des Satzes für ein (X, Y)-primäres Ideal I ist die Formel für die Dimension des Faktorringes in Termen von $E(I)$:

$$\dim_k(A/I) = \Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) + \cdots + (\alpha_{s-1} - \alpha_s)(\beta_s - \beta_{s-1}) .$$

Wir geben noch eine einfache Eigenschaft der vertikalen Standardbasen an.

1.3. Satz. *Sei $(f_1, \ldots, f_s)$ Standardbasis von I mit den Bezeichnungen von* 1.1.*, so existieren Polynome $(u_k^l)_{1 \leq k \leq l-1}$ aus dem Ring $k\langle X\rangle[Y]$, so daß*

$$X^{\alpha_{l-1} - \alpha_l} \cdot f_l = u_1^l f_1 + u_2^l f_2 + \cdots + u_{l-1}^l f_{l-1}$$

ist mit einem WEIERSTRASS*polynom u_{l-1}^l* in *Y vom Grade $\beta_l - \beta_{l-1}$.*

Der Beweis ist der von BRIANCON und GALLIGO ([1]): Es ist $X^{\alpha_{l-1} - \alpha_l} \cdot f_l = X^{\alpha_{l-1}} g_l = X^{\alpha_{l-1}} (u_{l-1}^l g_{l-1} + r'_{l-1})$ mit $\deg_Y(r'_{l-1}) < \beta_{l-1}$ und einem WEIERSTRASS-polynom u_{l-1}^l vom Grad $\beta_l - \beta_{l-1}$ in Y, d. h. es ist

$$X^{\alpha_{l-1} - \alpha_l} \cdot f_l = u_{l-1}^l f_{l-1} + r_{l-1}, \quad o_X(r_{l-1}) \geqq \alpha_{l-1}, \quad \deg_Y(r_{l-1}) < \beta_l .$$

Dabei ist o_X die Ordnung in der Variablen X. Wir lassen in r_{l-1} die $E(I)$-reduzierten Terme der Ordnung $< \alpha_{l-2}$ weg und dividieren durch g_{l-2}, usw., wobei wir dann die Beziehung $X^{\alpha_{l-1} - \alpha_l} \cdot f_l = u_{l-1}^l + \cdots + u_0^l f_0 + R$ mit reduziertem R erhalten, woraus offensichtlich $R = 0$ folgt, q.e.d.

1.4. Korollar. *Der Modul der Relationen zwischen* $(f_1, \ldots, f_s)$ *ist ein freier Untermodul von* $k\langle X, Y\rangle^s$ *vom Rang* $s-1$ *mit der Basis* $(e_1, \ldots, e_s)$, *wobei*

$$e_k = (-u_1^k, \ldots, -u_{k-2}^k, -u_{k-1}^k, X^{\alpha_{k-1}-\alpha_k}, 0, \ldots, 0)$$

ist.

Der Beweis ist nicht schwierig; wir verweisen auf [1].

2. Ausgezeichnete Deformationen

2.1. Definition. Sei $I \subset k\langle X, Y\rangle$ ein Ideal mit einer Standardbasis $I = (f_1, \ldots, f_s)$ (mit den Bezeichnungen von 1.1). $J \subset k\langle X, Y, T\rangle$ heißt ausgezeichnete Deformation von I, wenn

1. J Deformation von I ist, d. h. $k\langle X, Y, T\rangle/J$ ist flach über $k\langle T\rangle$ und $J(T=0) = I$.
2. $J = (F_1, \ldots, F_s)$ mit

$$F_j(X, Y, T) = G_j(X, Y, T) \cdot \prod_{i=0}^{\alpha_j - 1} (X - X_i(T)),$$

wobei $X_i(T) \in k\langle T\rangle$ sind mit $X_i(0) = 0$ für $i = 0, \ldots, \alpha_1 - 1$ und $G_j(X, Y, T) \in$ $\in k\langle X, Y, T\rangle$ mit $G_j(X, Y, 0) = g_j(X, Y)$ für $j = 1, \ldots, s$.

2.2. Satz. *Jede ausgezeichnete Deformation von I ist induktiv gegeben durch*

$$G_l = \prod_{i=\alpha_{l-1}}^{\alpha_1 - 1} (X - X_i(T)) U_1^l G_1 + \prod_{i=\alpha_{l-1}}^{\alpha_2 - 1} (X - X_i(T)) U_2^l G_2 + \cdots + U_{l-1}^l G_{l-1}$$

mit $X_i(T) \in k\langle T\rangle$, $X_i(0) = 0$ und $U_k^l \in k\langle X, Y, T\rangle$, $U_k^l(X, Y, 0) = u_k^l$.

Der Beweis ist klar: Wegen der Flachheitseigenschaften der Deformationen müssen sich die Relationen aus 1.4. zu Relationen

$$E_k = \left(-U_1^k, \ldots, -U_{k-1}^k, \prod_{i=\alpha_k}^{\alpha_{k-1}-1} (X - X_i(T)), 0, \ldots, 0\right)$$

liften lassen. Wir wollen nun den in der Einleitung angekündigten Satz beweisen:

2.3. Theorem. *Sei I ein* (X, Y)*-primäres Ideal in* $k[X, Y]$ *der Ordnung* $m =$ $= \dim_k k[X, Y]_{(X,Y)}/I$. *Dann gibt es eine ausgezeichnete Deformation* $J \subset k\langle X, Y, T\rangle$, *so daß in einer strengen Etalumgebung B von* $(X, Y, T) \subset k[X, Y, T]$ *gilt:*
Die Deformation ist schon über $k[T]$ *definiert und in einer offenen Umgebung des Ursprungs* $T=0$ *liegen über jedem Punkt t mit* $t \neq 0$ *nur nichtsinguläre Punkte über* $J\,(T=t)$.

Beweis. Wir wählen zunächst eine Standardbasis $(f_1, \ldots, f_s)$ von I mit $f_i^{\alpha_i} g_i$, g_i Weierstraßpolynome vom Grad β_i und

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_s = 0, \quad 0 = \beta_1 < \beta_2 < \cdots \beta_s .$$

Eine solche Basis können wir finden, da I (X, Y)-primär ist (wir müssen natürlich dazu I als Ideal von $k\langle X, Y\rangle$ auffassen). Sei B nun eine strenge Etalumgebung von $(X) \subset k[X]$, so daß die g_i und die u_k^l (vgl. 1.3.) in $B[Y]$ liegen. Wir wollen nun durch die Darstellung von 2.2. eine ausgezeichnete Deformation definieren. Dazu setzen wir $G_1 = 1$ und $U_k^l = u_k^l$ für $k < l-1$. Weiterhin wählen wir $X_i(T) \in k[T]$ und $c_k^l(T) \in k[T]$ mit $X_i(0) = 0$ und $c_k^l(0) = 0$ mit folgenden Eigenschaften: Sei $U_{l-1}^l = u_{l-1}^l + \sum_{k=0}^{\beta_l - \beta_{l-1} - 1} c_k^l(T)\, Y^k$ und G_l induktiv nach 2.2. durch G_1, U_k^l und $X_i(T)$ definiert, dann gibt es Punkte $(\wp_i, T-a)$ aus Spec $B[T]$, $\wp_i \in$ Spec B, $i = 0, \ldots, \alpha_1 - 1$, so daß in diesen Punkten

1. die oben definierten G_l als Polynome in Y lauter verschiedene Nullstellen haben,
2. $X - X_i(a)$ den paarweise verschiedenen Primidealen $\wp_i$ angehört.

Für geeignetes a und geeignet gewählte X_i, c_k^l kann man diese Bedingungen immer realisieren, da k algebraisch abgeschlossen ist. Nun ist die Menge U der Punkte P von Spec $k[T]$ definiert durch $T = t$, die mit unseren gewählten X_i, c_k^l den Bedingungen (1) und (2) genügen, nicht leer und offen.

Um 2.3. zu beweisen, müssen wir nun die gesuchte Etalumgebung angeben: Wir wählen als Etalumgebung $B[Y, T]$ und als Parameterraum unserer Deformation wählen wir die oben definierte offene Menge U. Unsere Deformation $J = (F_1, \ldots, F_s)$ ist dann über $B[T, Y]$ definiert. Wir müssen nun zeigen, daß für ein $P \in U$ über $J(P)$ genau $n \cdot m$ paarweise verschiedene Primideale liegen, wobei B durch ein Polynom vom Grad n gegeben ist.

Wir wählen dazu einen Punkt P aus U definiert durch $T = a$ und betrachten die Deformation J in diesem Punkt. Es liegt folgende Situation vor: $J(P) \subset B[Y]$, $J(P)$ ist definiert durch $\bar{F}_j = 0$ mit $\bar{F}_j = \prod_i (X - X_i(a))\, \bar{G}_j$, wobei die $\bar{G}_j$ Polynome aus $B[Y]$ sind, definiert durch 2.2. und mit der Eigenschaft, daß sie für $j > 1$ in einem durch $T = a$ definierten Punkt $\wp \supseteqq (X - X_i(a))$ aus Spec B lauter verschiedene Nullstellen haben. Es gibt für $X_i(a) \neq 0$ genau n verschiedene Punkte $\wp$ aus Spec B mit dieser Eigenschaft (man muß evtl. B noch verkleinern). Nun haben wir folgende Identitäten:

$$F_j = \prod_{i=0}^{\alpha_j - 1} (X - X_i(T))\, G_j$$

$$G_j = \prod_{i=\alpha_j - 1}^{\alpha_1 - 1} (X - X_i(T))\, U_1^j G_1 + \prod_{i=\alpha_j - 1}^{\alpha_2 - 1} (X - X_i(T))\, U_2^j G_2 + \cdots + U_{j-1}^j G_{j-1}$$

$$G_1 = 1$$

$$U_k^l = u_k^l \quad \text{für} \quad k < l-1 \quad (u_k^l \text{ vgl. } 1.3.)$$

$$\deg_Y u_{l-1}^l = \beta_l - \beta_{l-1}$$

$$U_{l-1}^l = u_{l-1}^l + \sum_{k=0}^{\beta_l - \beta_{l-1} - 1} c_k^l(T)\, Y^k$$

$$\prod_{i=\alpha_j}^{\alpha_{j-1} - 1} (X - X_i(T))\, F_j = U_1^j F_1 + \cdots + U_{j-1}^j F_{j-1}\,.$$

Dabei sind die G_i Polynome in Y vom Grad β_i, da $\beta_1=0$ ist. Daraus ersehen wir, daß für $T=a$ $F_1=\cdots=F_s=0$ ist genau dann, wenn $X=X_i(a)$ ist für ein i und $G_k=0$ ist, wenn $\alpha_{k-1}-1\geqq i\geqq\alpha_k$ ist.

Da die G_i mod $(T-a,\ \wp_i)$ β_i verschiedene Wurzeln haben, liefert uns das für festes X und T β_i verschiedene Punkte. Nun kann noch X und damit $\wp$ variieren, d. h. i durchläuft die Intervalle $\alpha_{k-1}-1\geqq i\geqq\alpha_k$ für festes β_i. Damit erhalten wir als Anzahl der verschiedenen Punkte über $J(P)$ gerade

$$n\cdot\sum_{i=2}^{s}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)\,\beta_i\,.$$

Im ersten Teil haben wir nun gerade nachgewiesen, daß die Summe $\sum_{i=2}^{s}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)\,\beta_i$ gleich m ist. Nun ist aber $n\cdot m$ gleich

$$\dim_k B[Y]/(f_1,\ldots,f_s)=\dim_k B[Y,T]/J(T)|_{T=a}$$

für $T=a$ aus U. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] Briancon, J. et A. Galligo, Deformations distinguées d'un point de C^2 ou R^2, Singularités à Cargèse, astérisque 7 et 8 (1973).

[2] Forster, O. und K. Knorr, Über Deformationen von Vektorraumbündeln auf kompakten komplexen Räumen, Math. Annalen 4 (1974).

[3] Grauert, H., Über die Deformationen isolierter Singularitäten analytischer Mengen, Inv. math. **15** (1972).

[4] Kurke, H., Pfister, G. und M. Roczen, Henselsche Ringe und algebraische Geometrie, Berlin 1975.

[5] Lafon, P., Theoreme de preparation de Weierstraß et series formelles algebriques, Notas Comm. Math. Recife, Pernambuco, Brasil No 11 (1966).

[6] Pfister, G. und M. Roczen, Zum Satz von Weierstraß-Grauert für algebraische Potenzreihen, erscheint in Revue Roumaine.

[7] Ein Vorbereitungssatz für Ideale in algebraischen Potenzreihenringen, ersch. demnächst.

[8] M. Roczen, Eine Bemerkung zum Vorbereitungssatz von Weierstraß-Grauert, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et appliquées, **XIX** No **10** (1974).

Humboldt-Universität
Sektion Mathematik
DDR – 108 Berlin
Unter den Linden 6