Transzendente Zahlen

Dr. Gerhard Pfister
Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

Zur Geschichte der irrationalen Zahlen

Die Notwendigkeit, verschiedene Dinge des täglichen Lebens miteinander in Beziehung zu bringen, zu vergleichen, führte unsere Vorfahren schon vor langer Zeit dazu, sich mit Zahlen zu beschäftigen. Keilschrifttafeln aus dem 3. Jahrtausend v. u. Z. belegen, daß die Sumerer im Gebiet zwischen Euphrat und Tigris die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... und positive rationale Zahlen (positive Brüche) kannten.

Bis zu den reellen Zahlen, wie sie jeder heute in der Schule kennenlernt, war es ein weiter Weg. Wir wollen uns hier nur an einige wichtige Etappen dieser Entwicklung erinnern.

Die irrationalen (d. h. nichtrationalen) Zahlen wurden bereits vor etwa 2500 Jahren in Griechenland entdeckt. Die Schule von Pythagoras (500 v. u. Z.) stellte fest, daß es Zahlen gibt, die nicht rational sind, d. h., die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen:

„... die Diagonale eines Quadrats ist kein ganzes Verhältnis seiner Seiten ...", d. h. Quadratwurzeln sind i. a. nicht rational. Beweise der Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ z. B. gehen auf Hippasos von Metapont bzw. Theodoros von Kyrene (um 390 v. u. Z.) zurück.[1]

Archimedes (um 287–212 v. u. Z.) versuchte, den Flächeninhalt des Kreises zu berechnen. Das gelang ihm nicht „exakt" (und konnte ihm auch nicht exakt gelingen!). Heute wissen wir: Wenn r der Radius des betrachteten Kreises ist, so ist sein Flächeninhalt πr^2.

Archimedes hätte die Zahl π — das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser — exakt bestimmen müssen. Für die damalige Zeit, in der man nur Brüche und höchstens Quadratwurzeln kannte, war das etwas völlig Neues.[2] Damit war auf ganz andere Art und Weise eine weitere Zahl entdeckt worden, die nicht rational ist. Ein — allerdings noch unvollständiger — Beweis für die Irrationalität dieser Zahl wurde jedoch erst 1761 von Johann Heinrich Lambert (1728–1777) gefunden.

[1] Wie uns mit den Keilschrifttafeln überliefert ist, haben sich schon die Sumerer im 3. Jahrtausend v.u.Z. mit der Lösung quadratischer Gleichungen, ja sogar einer speziellen kubischen Gleichung beschäftigt. Daraus kann man schließen, daß bereits die Sumerer mit irrationalen Zahlen rechneten. Auch die Babylonier besaßen schon Tafeln von rationalen Näherungslösungen für Quadratwurzeln, die sie mit der Näherungsformel $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ aufstellten. Die Irrationalität dieser Zahlen wurde jedoch erst von den Griechen bewußt erkannt.

[2] Archimedes berechnete die Zahl π näherungsweise, indem er durch wiederholtes Anwenden des Satzes von Pythagoras den Flächeninhalt sowohl des einem Kreis *ein*beschriebenen 96-Ecks berechnete als auch den des *umgeschriebenen* 96-Ecks. So ermittelte er als Schranken:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Das aus oberen und unteren Schranken gebildete arithmetische Mittel ergibt einen Näherungswert für π.

Hier zeigt sich das Wesen der *reellen* Zahlen: Man kann, indem man die Eckenzahl des den Kreis approximierenden n-Ecks immer mehr erhöht, den Wert von π immer genauer annähern. Das heißt, man kann π durch eine spezielle Folge rationaler Zahlen beliebig genau approximieren.

Im 19. Jh. konnte dann Adrien-Marie Legendre (1752–1833) den Lambertschen Beweis vervollständigen.

Eine Strecke der Länge π läßt sich nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren

Die Entdeckungen von $\sqrt{2}$ und π begründeten die Theorie der nicht- oder irrationalen Zahlen. Bei näherer Betrachtung zeigt sich, daß die Natur dieser beiden Zahlen grundverschieden ist. Außer ihrer Irrationalität haben sie nichts gemeinsam.

Während $\sqrt{2}$ die Länge einer Strecke sein kann, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist (als Diagonale eines Quadrats der Kantenlänge 1), ist eine solche Verfahrensweise für π nicht möglich. Dieser Unterschied wurde allerdings erst im vergangenen Jahrhundert deutlich.

Abb. 1 Archimedes (um 287—212 v. u. Z.), bedeutender Mathematiker, Physiker und Techniker der Antike, arbeitete in Alexandria und Syrakus.

Der französische Mathematiker Évariste Galois (1811—1832) befaßte sich unter anderem mit dem Problem, Polynomen-Gleichungen 5. Grades durch Wurzelausdrücke[3]) aufzulösen.[4]) Nachdem viele Versuche, eine Lösungsformel für Gleichungen 5. Grades zu finden fehlgeschlagen waren, gelang es Galois, eine Übersicht über alle Gleichungen zu gewinnen, die durch Wurzelausdrücke auflösbar sind, indem er eine neue Struktur einführte. Eine Anwendung dieser Theorie ist die Lösung von „Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal".

Nach der Galoistheorie ist für die Ausführbarkeit einer geometrischen Konstruktion ausschließlich mit Zirkel und Lineal entscheidend, ob die zu konstruierende Größe Nullstelle einer Gleichung $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i ist, wobei die Gleichung bei Benutzen allein der vier Grundrechenarten und des Quadratwurzelziehens auflösbar sein muß.

Damit ist das jahrhundertealte Problem der Verwandlung eines Kreises in ein flächengleiches Quadrat — Quadratur des Kreises genannt — darauf zurückgeführt zu untersuchen, ob π Nullstelle einer Gleichung $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ mit den oben genannten zusätzlichen Bedingungen ist. (Die Quadratur des Kreises bedeutet nichts anderes, als die Länge $\sqrt{\pi}$ zu konstruieren.[5])

Im Jahr 1882 konnte Ferdinand Lindemann (1852—1939) zeigen, daß es kein Polynom $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i gibt, für das $P(\pi) = 0$ ist. Das heißt, daß π nicht Nullstelle eines Polynoms sein kann, also nicht ausschließlich mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Damit ist aber noch mehr gezeigt:

Die Zahl π hat Eigenschaften, die von den bisher bekannten Eigenschaften nichtrationaler Zahlen wesentlich abweichen.

Während nichtrationale Zahlen der Form $\sqrt{a}$ Nullstelle des Polynoms $x^2 - a = 0$ sind (wobei a eine positive ganze Zahl ist), gibt es für π überhaupt kein Polynom $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $P(\pi) = 0$. π ist also eine Zahl, die nicht so einfache Eigenschaften wie Wurzelausdrücke hat. Um π zu untersuchen, sind Methoden erforderlich, die die „Kräfte der Algebra übersteigen" — quod algebrae vires transcendit. π ist transzendent.[6])

Relativ viel Zeit verging bis zur Erkenntnis, daß es nichtalgebraische Zahlen gibt

Fassen wir das Gesagte zusammen, so ergibt sich das folgende Bild: Viele Zahlen, die wir kennen (ganze Zahlen, rationale Zahlen, Wurzeln aus rationalen Zahlen) und alle Zahlen, mit denen in der Praxis gerechnet wird (endliche Dezimalbrüche — spezielle rationale Zahlen) haben eine Eigenschaft gemeinsam:

Für jede solche Zahl z gibt es ein Polynom

$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_i, das an der Stelle $x = z$ eine Nullstelle hat, d. h., für das $P(z) = 0$ gilt.

Umgekehrt ist natürlich nicht jede Nullstelle eines solchen Polynoms eine rationale Zahl oder eine Wurzel aus einer rationalen Zahl.[4]) Die Menge aller Zahlen — die Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten sind — hat nun eine besondere Stellung in der Menge der reellen Zahlen; man nennt diese Zahlen a l g e b r a i s c h e Z a h l e n.

Am Beispiel der Zahl π haben wir schon gesehen, daß die Mathematiker relativ spät erkannten, daß es Zahlen gibt, die nicht algebraisch sind. Im 18. Jh. schrieb Euler in seinem „Introductio in analysin infinitorum" sinngemäß: Es ist klar, daß die rationalen Logarithmen $\log_a b$ von rationalen Potenzen der Basis a herkommen. Wenn b keine rationale Potenz von a ist, ist $\log_a b$ selbst weder rational noch irrational auf der Geraden.

Euler hat damit die Existenz von transzendenten Zahlen (wie er sie nannte) schon für gesichert gehalten, obwohl er allem Anschein nach eine strenge Definition der transzendenten Zahl nicht hatte.

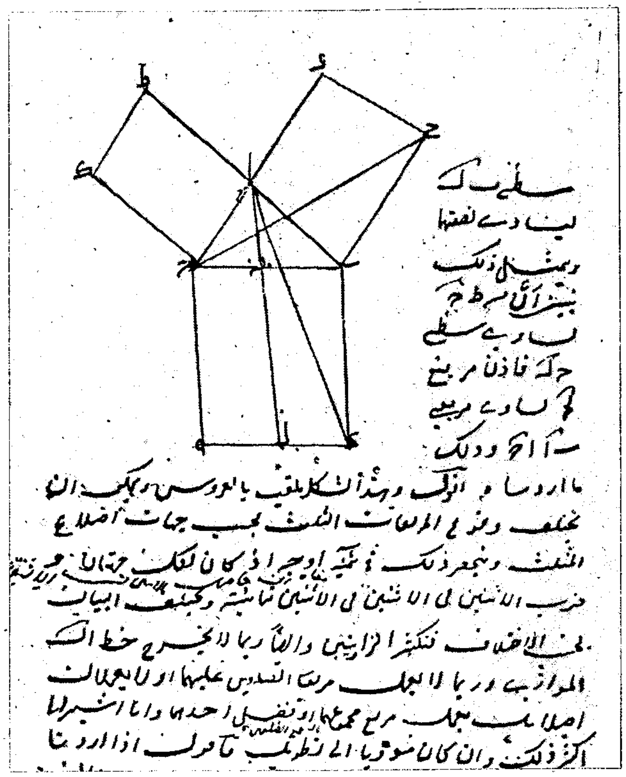

Abb. 2 Satz des Pythagoras in einer arabischen Handschrift aus dem 14. Jh. (Ausschnitt)

Heute nennt man eine reelle Zahl z transzendent, wenn es kein Polynom $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ (mit n ganzzahligen Koeffizienten a_i) gibt, das an der Stelle $x = z$ den Wert Null annimmt, also $P(z) = 0$. Das heißt, wenn es kein einziges Polynom gibt, für das die Zahl z Nullstelle ist, nennt man z eine t r a n s z e n d e n t e Z a h l.

Transzendente Zahlen sind nichtalgebraische und insbesondere nichtrationale Zahlen

Die Frage nach der Existenz von transzendenten Zahlen ist wesentlich schwieriger zu beantworten als beispielsweise die Frage nach der Existenz von nichtrationalen Zahlen. Besonders schwierig ist es, für eine vorgegebene nichtrationale Zahl (z. B. für π) zu entscheiden, ob sie transzendent ist oder nicht. Darauf werden wir später eingehen. Zunächst wollen wir uns diesen Unterschied zwischen transzendenter und nichttranszendenter Zahl noch einmal klar machen:

Die rationalen Zahlen liegen zwar dicht aber nicht lückenlos auf dem Zahlenstrahl. Wollen wir eine Strecke auf dem Zahlenstrahl genau durch eine Einheitsstrecke t messen, so verwenden wir nacheinander die Meßstrecken $t, \frac{t}{10}, \frac{t}{100}, \ldots$

Jede weitere Messung steuert eine neue Dezimale zur Maßzahl bei. Auf diese Weise entsteht ein Dezimalbruch, der in

[3]) Der Wurzelausdruck $x_{1,2} = \frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ als Formel zum Lösen einer beliebigen quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist allgemein bekannt. Italienische Mathematiker kannten schon im 16. Jh. das Prinzip der allgemeinen Lösungsformel von Gleichungen 3. und 4. Grades. Weitere Formeln wurden nicht gefunden. Der norwegische Mathematiker Niels Henrik Abel (1802—1829) zeigte, daß eine derartige Lösungsformel für Gleichungen 5. Grades nicht existieren kann.

[4]) Vgl. dazu auch G. Pfister, M. Roczen, „Algebraische Geometrie I", Wiss. u. Fortschr. 23 (1973) 10, S. 446—449

[5]) Ein Kreis mit dem Radius 1 cm hat den Flächeninhalt π cm²; ein Quadrat mit dem Flächeninhalt π cm² hat die Kantenlänge $\sqrt{\pi}$ cm.

[6]) Dieser Ausspruch geht auf Leonhard Euler (1707—1783) zurück.

Ausnahmefällen abbricht oder periodisch ist (d. h. genau in diesem Fall eine rationale Zahl darstellt). Die endlichen und die unendlichen positiven und negativen Dezimalbrüche bilden den Bereich der reellen Zahlen.[7] Man kann leicht einen unendlichen Dezimalbruch konstruieren, der nicht periodisch ist. Damit erhält man eine nichtrationale Zahl. Nur in Ausnahmefällen kann man an der Dezimalbruchentwicklung erkennen, ob eine Zahl algebraisch oder transzendent ist. (Wie soll man im allgemeinen eine Übersicht über eine unendliche nichtperiodische Entwicklung der Dezimalstellen nach dem Komma gewinnen?). Wir werden im nächsten Abschnitt noch einmal darauf zurückkommen.

Liouville wies als erster die Existenz von transzendenten Zahlen nach

Mitte des 19. Jh. konnte Joseph Liouville (1809—1882) zum ersten Mal die Existenz transzendenter Zahlen nachweisen. Er zeigte zunächst, daß bei der Annäherung algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen[8] spezifische Gesetzmäßigkeiten auftreten, und er gab dann einfache Beispiele für Zahlen an, die diesen Gesetzmäßigkeiten nicht genügen — die also nicht algebraisch sein können.

Genauer hat Liouville folgenden berühmten Approximationssatz für algebraische Zahlen bewiesen:

Ist γ eine algebraische Zahl, $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten a_i, für die γ Nullstelle ist, also $P(\gamma) = 0$, dann gilt für alle ganzen Zahlen p und für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen q stets folgendes:

$$\text{Wenn } \frac{1}{q} \geq \left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \text{ ist, dann ist } \left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{n+1}}. \qquad (*)$$

Das war eine aufsehenerregende Entdeckung. Sie besagt praktisch: Alle von γ verschiedenen rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit hinreichend großem Nenner q, die sich von einer algebraischen Zahl γ um die Differenz von höchstens $\frac{1}{q}$ unterscheiden, können γ nicht näher kommen als $\frac{1}{q^{n+1}}$.

Dabei ist n der Grad eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten, das γ als Nullstelle besitzt. Das bedeutet, daß aus der bestmöglichen Annäherung einer auf Transzendenz zu untersuchenden Zahl z abzuleiten ist, ob es sich um eine algebraische oder um eine nichtalgebraische (d. h. transzendente) Zahl handelt — je nachdem, ob die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ als Näherungswert sich um wenigstens $\frac{1}{q^{n+1}}$ von z unterscheidet bzw. ob diese Differenz geringer als $\frac{1}{q^{n+1}}$ ist.

Wenn es nun gelingt, eine reelle Zahl zu konstruieren, die für jedes n eine bessere Annäherung durch die entsprechende rationale Zahl $\frac{p}{q}$ gestattet als es der Satz von Liouville erlaubt, dann ist diese Zahl transzendent.

Als Beispiel dazu betrachten wir die Zahl

$$a = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu!}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \ldots =$$

$$0{,}1100010\ldots010\ldots010.$$

$$\nu=3!=6 \quad \nu=4! \quad \nu=5!$$

Zunächst ist ersichtlich, daß diese Zahl ein nichtperiodischer Dezimalbruch ist, da die Abstände zwischen den Einsen immer größer werden. Also ist a irrational (jedoch damit noch nicht transzendent!) Die Zahl a läßt sich nun durch die Folge der rationalen Zahlen $x_m = \frac{p_m}{q_m} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{10^{\nu!}}$ beliebig genau annähern. Wenn a algebraisch wäre, würde ein Polynom $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i existieren, für das a Nullstelle ist, also mit $P(a) = 0$. (Sollte a eine transzendente Zahl sein, muß dies jedoch widerlegt werden!). Um das zum Widerspruch zu führen, betrachten wir eine der oben definierten Zahlen x_m mit $m > n+1$.

Die Darstellung von x_m als Bruch sei

$$\frac{A}{10^{m!}} = x_m = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{10^{\nu!}}$$

Nun ist $a - \frac{A}{10^{m!}} \geq \frac{1}{10^{m!}}$, wie man aus der Definition von a und der Dezimalbruchentwicklung erkennt.

Nach dem Satz von Liouville (*) müßte dann

$$a - \frac{A}{10^{m!}} \geq \frac{1}{10^{m!\,(n+1)}} \quad \text{sein.}$$

Wenn man aber beide Zahlen in ihrer Dezimalbruchentwicklung hinschreibt und vergleicht, erkennt man das Gegenteil:

$$a - \frac{A}{10^{m!}} = 0{,}0\ldots010\ldots010\ldots$$
$$(m+1)!\ (m+2)!$$

$$\frac{1}{10^{m!\,(n+1)}} = 0{,}0\ldots\ldots010\ldots\ldots$$
$$m!(n+1)$$

Da $m!(n+1) < (m+1)!$ ist, steht die 1 in der Ziffernfolge der letzten Zahl einige Ziffern vor der ersten 1 aus der Ziffernfolge der ersten Zahl.

In Wirklichkeit gilt also $a - \frac{A}{10^{m!}} < \frac{1}{10^{m!\,(n+1)}}$.

Das ist ein Widerspruch zum Satz von Liouville. Dieser Widerspruch kann seine Ursache nur darin haben, daß wir angenommen hatten, a wäre algebraisch.

Damit ist gezeigt, daß die Zahl

$0{,}1100010\ldots\ldots010\ldots\ldots010\ldots.$ transzendent ist.

Der Beweis des Satzes von Liouville ist von heutigen Standpunkt elementar und für jemanden, der die Differentialrechnung kennt, ohne Schwierigkeiten zu verstehen.

Die algebraischen Zahlen sind abzählbar

Etwa 25 Jahre nach Liouville gelang Georg Cantor (1845—1918) bei seiner Arbeit auf dem Gebiet der Mengenlehre ein neuer Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen. Die Methode ist völlig verschieden von der eben beschriebenen, und sie hat eine breite Entwicklung in der Mathematik ausgelöst.

Cantor wies nach, daß man die algebraischen Zahlen abzählen kann. Was bedeutet das? Man kann jeder algebraischen Zahl eine natürliche Zahl — ihre „Registriernummer" — zuordnen. Wie ist das möglich, da die Menge der natürlichen Zahlen doch eine Teilmenge der Menge der algebraischen Zahlen ist (wenn z eine natürliche Zahl ist, ist z Nullstelle des Polynoms $x - z$)?

Die Menge der algebraischen Zahlen ist unendlich, und auch die Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich; es sind also genügend „Registriernummern" für die algebraischen Zahlen vorrätig. Das erscheint jetzt plausibel. Es gibt aber durchaus unendliche Mengen — z. B. die Menge der reellen Zahlen —,

[7] Die Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche geht im wesentlichen auf den holländischen Kaufmann und Ingenieur Simon Stevin (1548—1620) zurück.
Streng genommen muß man bei der Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche darauf achten, daß für rationale Zahlen diese Darstellung nicht immer eindeutig ist (z. B. hat $1/10$ die Darstellung $0{,}100\ldots$ und auch $0{,}0999\ldots$).

[8] Bekanntlich kann man jede reelle Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen annähern. Das erkennt man, wenn man sich eine reelle Zahl a in ihrer Dezimalbruchentwicklung vorstellt und berücksichtigt, daß das Abbrechen dieser Entwicklung nach der n-ten Dezimalen eine rationale Zahl liefert.

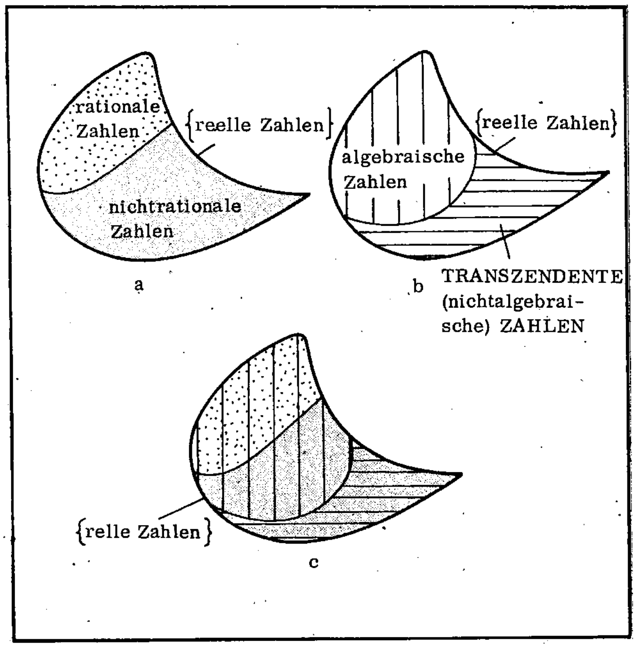

Abb. 3 Die Menge der reellen Zahlen besteht — je nach Betrachtungsweise — einerseits aus den disjunkten Teilmengen der rationalen und der nichtrationalen (auch irrationalen) Zahlen (Abb. 3a) und andererseits aus den disjunkten Teilmengen der algebraischen Zahlen und der nichtalgebraischen oder transzendenten Zahlen (Abb. 3b). Aus der Graphik 3c geht hervor, daß sämtliche rationalen Zahlen algebraische Zahlen sind (d. h. die Menge der rationalen Zahlen ist Teilmenge der algebraischen Zahlen), und daß aber nichtrationale Zahlen algebraische o d e r transzendente Zahlen sein können.
(Die Graphik sagt natürlich nichts über die Lage der Zahlen aus, wenn man sie sich als Punkte auf der reellen Zahlengeraden vorstellt. Dort kann man die algebraischen Zahlen von den transzendenten nicht so „schön" trennen; zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegt stets eine transzendente Zahl, zwischen zwei verschiedenen transzendenten Zahlen liegt stets eine rationale Zahl.)

die sich nicht mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnumerieren lassen, d. h., es gibt verschiedene „Arten des Unendlichen"[9]). Diese herausragende Entdeckung ist das Verdienst Cantors.

Er zeigte, daß die Menge aller reellen Zahlen nicht abzählbar ist (d. h., daß es „sehr viel mehr" reelle Zahlen als algebraische Zahlen gibt), und er wies auf diesem Weg die Existenz von transzendenten Zahlen nach. Aus heutiger Sicht ist der Beweis nicht schwierig, und wir wollen uns diesen hier ansehen:

Zunächst wollen wir uns überlegen, wie man die algebraischen Zahlen durchnumerieren kann.

Wir werden dazu zeigen, daß sich die Menge der algebraischen Zahlen in Klassen K_n, $n = 2, 3, \ldots$ einteilen lassen, so daß in jeder Klasse K_n nur endlich viele algebraische Zahlen liegen. Dann numerieren wir die Zahlen der Klasse K_2 durch, danach die der Klasse K_3, dann die der Klasse $K_4, \ldots$ und ordnen auf diese Weise jeder algebraischen Zahl ihre „Nummer" zu, d. h., wir zählen die algebraischen Zahlen ab.

Da die algebraischen Zahlen dadurch charakterisiert sind, daß sie Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten sind, betrachten wir zunächst diese Polynome und werden sie in verschiedene Klassen einteilen, die jeweils nur aus endlich vielen Polynomen bestehen. Jedem Polynom $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $a_n \neq 0$ ordnen wir deshalb eine natürliche Zahl zu, die gewöhnlich als Höhe des Polynoms bezeichnet wird. Polynome gleicher Höhe bilden dann eine Klasse. Als Höhe von $P(x)$ bezeichnen wir die Zahl $h = n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$. Es ist klar, daß zu einer fest vorgegebenen Höhe h nur endlich viele Polynome dieser Höhe existieren. So gibt es zur Höhe $h = 2$ nur die Polynome $P(x) = x$ und $P(x) = -x$ ($h = 1 + 0 + 1 = 2$ bzw. $h = 1 + 0 + -1 = 2$); zu $h = 3$ gibt es die Polynome $P(x) = x^2$, $P(x) = -x^2$, $P(x) = x + 1$, $P(x) = -x - 1$, $P(x) = x - 1$, $P(x) = -x + 1$, $P(x) = 2x$ und $P(x) = -2x$. Außerdem gibt es noch konstante Polynome (z. B. $P(x) = 2$ und $P(x) = -2$) zur Höhe 3, die hier aber nicht von Interesse sind.

Nun ist bekannt, daß ein Polynom

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

vom Grad n höchstens n reelle Nullstellen hat. Daraus folgt, daß es zu vorgegebener Höhe h nur endlich viele algebraische Zahlen gibt, die Nullstelle eines Polynoms der Höhe h sind. Wir können deshalb die algebraischen Zahlen folgendermaßen durchnumerieren: Für die Höhe $h = 2$ gibt es *eine* algebraische Zahl, die Nullstelle eines Polynoms der Höhe 2 ist — nämlich 0 (da die Polynome der Höhe 2 nur x und $-x$ waren). Diese algebraische Zahl bekommt die „Registriernummer" 1. Für die Höhe $h = 3$ gibt es 3 algebraische Zahlen, die Nullstelle eines Polynoms der Höhe $h = 3$ sind, nämlich 0, 1 und -1 (vgl. die entsprechende Aufstellung der Polynome der Höhe $h = 3$). Die algebraische Zahl Null hat schon eine Nummer, die Zahlen 1 und -1 bekommen die Nummern 2 und 3. So verfahren wir weiter. Zur Höhe 4 gibt es 22 Polynome; wir wollen nur diejenigen aufschreiben, die neue algebraische Zahlen liefern: $P(x) = x - 2$, $P(x) = x + 2$, $P(x) = 2x + 1$, $P(x) = -2x + 1$. Wir erhalten hier vier neue algebraische Zahlen: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 2, -2. Diese erhalten die Nummern 4, 5, 6, 7. Bei der Höhe 5 tritt zum ersten Mal eine nichtrationale Zahl auf, nämlich $\sqrt{2}$ (mit dem Polynom $x^2 - 2$). Diese könnte die Nummer 8 bekommen ....

Wenn wir so weiter verfahren, können wir wirklich alle algebraischen Zahlen durchnumerieren, da es zu jeder festen Höhe nur endlich viele algebraische Zahlen gibt.

Als zweites soll nun gezeigt werden, daß man die reellen Zahlen nicht abzählen kann.

Der Beweis vom Gegenteil soll geführt werden.

Dazu nehmen wir an, wir hätten die reellen Zahlen des Einheitsintervalls durchnumeriert, d. h. alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft $0 \leq a \leq 1$. Dann ließen sich diese Zahlen in einer Folge

$$a_1 = 0,\, z_{11}z_{12}z_{13} \ldots\ldots$$
$$a_2 = 0,\, z_{21}z_{22}z_{23} \ldots\ldots$$
$$a_3 = 0,\, z_{31}z_{32}z_{33} \ldots\ldots$$
$$\ldots$$

aufschreiben, wobei die z_{ij} die Ziffern 0, 1, ... oder 9 sind. Wir werden nun eine Zahl b konstruieren, die in dieser Folge nicht vorkommen kann.

Wir setzen

$$b = 0,\, x_1x_2x_3 \ldots\ldots \text{ mit } x_i = \begin{cases} z_{ii} + 1, & \text{falls } z_{ii} < 8 \\ z_{ii} - 1, & \text{falls } z_{ii} \geq 8 \end{cases}$$

Wichtig bei der Konstruktion von b ist, daß wir die Ziffern x_i der konstruierten Zahl so wählen, daß sie von den Ziffern z_{ii} verschieden sind.[10]) Die so konstruierte Zahl kann in der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nicht enthalten sein. Wäre nämlich die konstruierte Zahl $b = a_k$ für ein k, d. h., würde die konstruierte Zahl mit einer der durchnumerierten reellen Zahlen des Einheitsintervalls übereinstimmen, dann müßte

$$b = 0,\, x_1x_2 \ldots x_k \ldots = a_k = z_{k1}z_{k2} \ldots z_{kk} \ldots$$

sein. Daraus folgt aber $x_k = z_{kk}$. Das stimmt aber nicht, es ist ja $x_k = z_{kk} \pm 1$. Damit kann b nicht eine der Zahlen

[9]) siehe M. Kühnrich, „100 Jahre Mengentheorie", Wiss. u. Fortschr. 24 (1974) 12, S. 530

$a_1, a_2, \ldots$ sein. Wir haben also gezeigt, daß die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht abzählbar ist. Dann kann aber die Menge aller reellen Zahlen erst recht nicht abzählbar sein.

Die Menge der algebraischen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen. Da die Menge der algebraischen Zahlen. Es gibt also „sehr" viele Zahlen, die nichtalgebraisch, d. h. transzendent, sind. Cantor hat damit auf für uns recht einfache Weise die Existenz transzendenter Zahlen nachgewiesen.

Viel schwieriger ist es, von einer vorgegebenen Zahl zu entscheiden, ob sie algebraisch oder transzendent ist. Wie wir schon zu Anfang gesehen haben, konnte erst relativ spät die Transzendenz von π nachgewiesen werden. Das gleiche gilt für die aus der Analysis bekannte und wichtige Zahl

$$e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828 \ldots$$

Einiges über die Zahlen π und e

Man kann verhältnismäßig leicht zeigen, daß e nichtrational[1] ist (Jean Baptiste Joseph de Fourier, 1768–1830):

Wir benutzen die Reihendarstellung von e: $e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}$.

Nehmen wir einmal an, e wäre rational, d. h. $e = \frac{a}{b}$ für geeignete natürliche Zahlen a, b. Dann betrachten wir die Zahl

$b!\,e = b! + \ldots + \frac{b!}{b!} + \frac{b!}{(b+1)!} + \ldots$ Diese Zahl ist ganz, da aus $e = \frac{a}{b}$ folgt $b!e = (b-1)!a$. Daraus folgt, daß auch die Zahl

$$x = b!e - \left(b! + \ldots + \frac{b!}{b!}\right) = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \ldots$$

ganz sein muß. Nun ist aber die Zahl

$$x = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \ldots = \frac{1}{b} \leq 1.$$

Aus diesem Widerspruch folgt, daß die Zahl e nicht rational sein kann.

Die Irrationalität von π ist schon schwieriger zu beweisen, weil π nicht durch eine so einfache Reihe darstellbar ist. Noch schwieriger ist die Arithmetik von e $+ \pi$: Bis heute ist noch nicht bekannt, ob e $+ \pi$ rational oder irrational ist.

Ende des 19. Jh. konnte Charles Hermite (1822–1901) mit recht schwierigen komplex-analytischen Methoden (Betrachtung gewisser Integrale mit unendlichen Grenzen) die Transzendenz von e nachweisen. Der Mathematiker Lindemann entwickelte diese Methode weiter und zeigte damit die Transzendenz von π. Später konnten u. a. David Hilbert (1862–1943) und H. Weber (1843–1913) noch wesentlich einfachere Beweise dafür geben. Endpunkt dieser Entwicklung war im Prinzip der Satz von Lindemann-Weierstraß:

Seien $a_1, \ldots, a_n$ algebraische Zahlen, die nicht alle 0 sind und $b_1, \ldots, b_n$ paarweise verschiedene algebraische Zahlen, dann ist $a_1 e^{b_1} + \ldots + a_n e^{b_n} \neq 0$.

Dies wurde 1885 von Karl Weierstraß (1815–1897) bewiesen. Aus diesem Satz folgt natürlich sofort die Transzendenz von e und π: Wäre nämlich e algebraisch, würde e einer Gleichung $c_n e^n + \ldots + c_1 e + c_0 = 0$ genügen mit rationalen Zahlen c_i. Das widerspricht sofort dem obigen Satz. Weiterhin ist $e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$. Wäre π algebraisch, würde das auch dem obigen Satz widersprechen.

Das 7. Hilbertsche Problem

Zur Jahrhundertwende hatte Hilbert auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Paris dreiundzwanzig Probleme formuliert. Dieser Vortrag erwies sich in den späteren Jahrzehnten als Programm für die weitere Entwicklung der Mathematik; es zeigte sich immer deutlicher, daß Hilbert Kernprobleme der Mathematik getroffen hatte. Die Lösung dieser Probleme hat auf viele Gebiete der Mathematik befruchtend gewirkt. Hilbert stellte als 7. Problem die Aufgabe zu untersuchen, ob die Zahl $2^{\sqrt{2}}$ — oder allgemeiner a^b mit algebraischen Zahlen a und b — transzendent oder algebraisch ist. Derartige Vermutungen gehen — wie schon erwähnt — auf Euler zurück.

In der Entwicklung von Beweismethoden für die Transzendenz von Zahlen sind in den 75 Jahren, die vergangen sind, seit die Hilbertschen Probleme gestellt wurden, wesentliche Erfolge erzielt worden.

Im Jahr 1936 konnten A. O. Gelfond und unabhängig von ihm T. Schneider allgemein folgendes zeigen:

Wenn a eine von 0 und 1 verschiedene algebraische Zahl ist und b eine nicht rationale algebraische Zahl, dann ist a^b transzendent. Damit wurde das 7. Hilbertsche Problem (über 30 Jahre nachdem es formuliert worden war) gelöst. Dieses Resultat ist praktisch auch die Antwort auf die zuvor angeführte Eulersche Vermutung:

Die Zahl $\log_a b$ ist für algebraische Zahlen a und b entweder transzendent oder rational. Wenn nämlich $b = a^{\frac{p}{q}}$ ist für ganze Zahlen p und q, dann ist $\log_a b = \frac{p}{q}$ rational. Wenn b keine (rationale) Potenz von a ist, dann ist die Zahl $c = \log_a b$ transzendent. Wäre nämlich in diesem Fall (der Transzendenz) $\log_a b$ algebraisch, dann müßte c auch nichtrational sein. Dann ist aber nach dem Satz von Gelfond die Zahl $b = a^{\log_a b}$ transzendent. Das stimmt aber nicht, da von einer algebraischen Zahl b ausgegangen worden war; somit muß $\log_a b$ transzendent sein.

Viele Resultate könnten hier noch genannt werden, die den Fortschritt auf diesem Gebiet dokumentieren: Man hat eine Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen vorgenommen, ein Maß für die Kompliziertheit der Transzendenz wurde eingeführt.

K. Mahler, K. F. Roth und T. Schneider verallgemeinerten den Satz von Liouville. Aus deren Verallgemeinerung kann man u. a. folgern, daß die Zahl 0,12345678910111213 .... transzendent ist.

Ein Resultat der letzten Jahre soll nun noch angeführt werden, um ein Beispiel für die Arbeit auf dem Gebiet der transzendenten Zahlen in unserer Zeit zu geben. A. Baker bewies 1966 folgenden Satz: Seien $a_1, \ldots, a_n$ von 0 und 1 verschiedene algebraische Zahlen und $b_1, \ldots, b_n$ algebraische Zahlen, so daß $1, b_1 \ldots b_n$ über den rationalen Zahlen linear unabhängig ist (d. h. für alle rationalen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ ist die Summe $x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ irrational, außer für $x_1 = \ldots = x_n = 0$). Dann ist das Produkt $a_1^{b_1} \ldots a_n^{b_n}$ transzendent.

Bei der Untersuchung der transzendenten Zahlen ist vieles schon getan, viele Fragen sind aber auch noch offen. Wie schwierig die Untersuchung transzendenter Zahlen ist, verdeutlicht folgende Frage, auf die bis heute niemand eine Antwort weiß: Sind die Zahlen e $+ \pi$, e $- \pi$, eπ transzendent oder nicht?

Wie so oft in der Mathematik hat die Lösung eines Problems (z. B., daß e und π transzendent sind) neue Probleme nach sich gezogen. Sicher wird man auch hier eines Tages neue Methoden entwickeln und diese Frage beantworten können.

[10] Man muß streng genommen auch darauf achten, daß kein endlicher Dezimalbruch und kein Dezimalbruch, der von einer gewissen Stelle an nur Ziffern 9 enthält, entsteht, da in diesem Fall die Darstellung dieser reellen Zahl durch Dezimalbrüche nicht eindeutig ist.