ZUM SATZ VON WEIERSTRASS—GRAUERT FÜR ALGEBRAISCHE POTENZREIHEN

VON

MARKO ROCZEN und GERHARD PFISTER

1. EINLEITUNG

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $T = (T_1 \dots, T_m)$ ein m-Tupel von Unbestimmten. In [2] hat Grauert für den Körper k der komplexen Zahlen und den Ring $k\{T\}$ der konvergenten Potenzreihen eine weitgehende Verallgemeinerung des klassischen Vorbereitungssatzes von Weierstraß bewiesen. Sie besteht darin, daß man jedem Ideal eine biholomorphe Invariante, genannt reduzierendes System, zuordnet, so daß das Ideal nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation ein eindeutig bestimmtes zu dem reduzierenden System gehöriges Erzeugendensystem von „Weierstraßpolynomen" hat. In [6] hat einer der Autoren bewiesen, daß eine entsprechende Aussage auch für die formalen Potenzreihenalgebren über einem beliebigen Körper k gilt und darüber hinaus für alle Unteralgebren, die einer gewissen Zusatzbedingung (der Gültigkeit einer Divisionsformel) genügen. Daraus folgt unter anderem, daß Grauerts Resultat auch dann richtig bleibt, wenn k ein beliebiger vollständig bewerteter Körper ist und wir den Ring der konvergenten Potenzreihen über diesem Körper betrachten.

Es entsteht nun die Frage, ob man die Aussage auch für algebraische Potenzreihen aufrecht erhalten kann, was nach dem Gesagten einen Beweis der Divisionsformel erfordert. Da sie für formale Potenzreihenringe bewiesen ist, kommt es hier darauf an, die auftretenden Terma zu algebraisieren. Es zeigt sich, daß man den Artinschen Approximationssatz [1] nicht direkt anwenden kann. Wir werden in dieser Arbeit einen auf unser Problem zugeschnittenen Approximationssatz für lineare Gleichungssysteme über einem Polynomenring in zwei Veränderlichen beweisen, der es uns dann gestattet, den Grauertschen Satz für den Ring $k\langle T_1, \dots, T_m\rangle$ mit $m \leqslant 3$ zu beweisen.

2. BEREITSTELLUNG DER GRUNDBEGRIFFE

Sei $\nu \in N^m$ ein Multi-Index, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, so schreiben wir $T^\nu = T_1^{\nu_1} \cdot T_2^{\nu_2} \cdot \dots \cdot T_m^{\nu_m}$. Wir setzen $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_m$ und werden einen Multiindex $\nu' = (\nu_., \dots, \nu_i)$ mit $i < m$ gelegentlich mit dem Multiindex

$(\nu_1, \ldots, \nu_i, 0, \ldots, 0) \in N^m$ identifizieren. Nach Grauert [2] versteht man unter einem reduzierenden System $\mathcal{S}$ ein m-Tupel $(s_1, \ldots, s_m)$ von Abbildungen s_i gewisser Teilmengen von $(N \cup \{\infty\})^{i-1}$, die Bildwerte in der Menge der positiven ganzen Zahlen vereinigt mit $\{\infty\}$ haben, so daß

$$s_1 = \text{konstant}$$

$$s_i = s_i(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) \text{ definiert für } 0 \leqslant \nu_1 < s_1, \ldots,$$

$$0 \leqslant \nu_{i-1} < s_{i-1}(\nu_1, \ldots, \nu_{i-2})$$

ist und überdies gilt:

Ist $s_{i-1}(\nu_1, \ldots, \nu_{i-2}) = \infty$, so ist $s_i(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) = \infty$ für alle $\nu_{i-1} \in N$. Der Multiindex $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$ $(i \leqslant m)$ heißt reduziert bezüglich $\mathcal{S}$, falls er zum Definitionsbereich von $\mathcal{S}$ gehört. Falls überdies $i < m$ und $s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i) \neq \infty$ ist, so nennen wir ν endlich und setzen $\nu^* = (\nu_1, \ldots, \nu_i, s_{i+1}(\nu))$. Durch die ν^* ist $\mathcal{S}$ offenbar eindeutig charakterisiert. Ist $f = \Sigma\, a_\nu T^\nu$, $a_\nu \in k$ eine formale Potenzreihe über k, so nennen wir sie bezüglich $\mathcal{S}$ reduziert, falls $a_\nu = 0$ ist für alle ν, die nicht $\mathcal{S}$-reduziert sind. Zu jedem reduzierenden System gibt es stets nur endlich viele endliche Multiindizees. Eine Menge $\Lambda = \{\omega_\nu,\ \nu \text{ endlich zu } \mathcal{S}\}$ heißt zu $\mathcal{S}$ gehöriges System, wenn $\omega_\nu = T^{\nu^*} + r_\nu$ formale Potenzreihen mit $o(r_\nu) > \nu^*$ ist (o bezeichnet den kleinsten Multiindex, zu dem ein von 0 verschiedener Term der Potenzreihe gehört; die Multiindizees sind dabei wie üblich lexikographisch geordnet, d.h. für $\mu, \nu \in N^m$ schreiben wir $\mu < \nu$, falls $|\mu| < |\nu|$ ist oder $|\mu| = |\nu|$ und für ein i gilt $\mu_i < \nu_i$, $\mu_{i+j} = \nu_{i+j}$ für $j = 1, \ldots, m-i$). Wenn außerdem alle r_ν reduzierte Potenzreihen sind, so heißt Λ ein zu $\mathcal{S}$ gehöriges System von Weierstraßpolynomen. Nach [6] gilt nun:

(A) Divisionsformel: Sei $\Lambda = \{\omega_\nu\}$ ein zu $\mathcal{S}$ gehöriges System, so hat jedes $h \in k[[T]]$ eine eindeutige Darstellung $h = \sum_\nu Q_\nu \omega_\nu + r$ mit einer bezüglich $\mathcal{S}$ reduzierten Potenzreihe r und

$$Q \in k[[T_{i+1}, \ldots, T_m]] \text{ für } \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i).$$

(B) Vorbereitungssatz: Sei A eine k-Unteralgebra von $k[[T]]$, in der die Aussage (A) gilt. Dann gehört zu jedem Ideal J von A ein reduzierendes System $\mathcal{S}$, so daß J nach einer hinreichend allgemeinen linearen Koordinatentransformation ein durch $\mathcal{S}$ eindeutig bestimmtes Erzeugendensystem von Weierstraßpolynomen besitzt mit red $(J) = 0$ (red bezeichnet den durch (A) eindeutig bestimmten „Rest" bei der Division durch Λ).

Wir beweisen nun die Aussage (A) für den Ring der algebraischen Potenzreihen in $m \leqslant 3$ Unbestimmten und gewinnen damit nach (B) eine allgemeine Existenzaussage für diese Ringe.

3. DER APPROXIMATIONSSATZ

SATZ. *Seien* f, $\omega_\nu \in k[[T_1, T_2, T_3]]$, $\nu = 0, \ldots, t$, ω_0 T_1-*allgemein, d.h.* $\omega_0(T_1, 0, 0) \neq 0$. *Seien* $\bar{Q}_\nu \in k[[T_{i_\nu}, \ldots, T_3]]$ *mit* $\sum_{\nu=0}^{t} \omega_\nu \bar{Q}_\nu = f$ *und* $\bar{Q}_\nu \in k[[T_2, T_3]]$ *für* $\nu > 0$.

Dann existieren $Q_\nu \in k\langle T_{i_\nu}, \ldots, T_3\rangle$ *mit* $\sum_{\nu=0}^{t} \omega_\nu Q_\nu = f$.

Beweis. Wir benötigen folgenden Hilfssatz:

LEMMA: *Sei*

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n + b_{11}Y_1 + \ldots + b_{1m}Y_m &= c_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{s1}X_1 + \ldots + a_{sn}X_n + b_{s1}Y_1 + \ldots + b_{sm}Y_m &= c_s \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem mit a_{ik}, b_{ik}, $c_i \in k\langle T_1, T_2\rangle$. *Wenn dieses Gleichungssystem eine formale Lösung* $(\bar{x}_i)$, $(\bar{y}_j)$ $\bar{x}_i \in k[[T_1, T_2]]$ *und* $\bar{y}_j \in k[[T_1]]$ *hat, dann existiert eine algebraische Lösung* (x_i), (y_j) *des obigen Systems mit* $x_i \in k\langle T_1, T_2\rangle$ *und* $y_j \in k\langle T_1\rangle$.

Wir wollen zunächst einmal annehmen, der Hilfssatz sei bewiesen. Nun betrachten wir die Gleichung $\Sigma\, \omega_\nu \bar{Q}_\nu = f$. Da ω_0 T_1-allgemein ist, können wir nach dem Weierstraß'schen Vorbereitungssatz für algebraische Potenzreihen

$$\omega_\nu = \omega_\nu' \omega_0 + \sum_{j=0}^{s-1} \omega_{\nu j} T_1^j$$

$$f = f' \omega_0 + \sum_{j=0}^{s-1} f_j T_1^j$$

schreiben, wobei die $\omega_{\nu j}$ und f_j aus $k\langle T_2\, T_3\rangle$ sind.

Daraus erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\omega_0\Big(\bar{Q}_0 + \sum_{\nu=1}^{t} \omega_\nu' \bar{Q}_\nu - f'\Big) + \Sigma\, \omega_{\nu j} T_1^j \bar{Q}_\nu = \sum_{j=0}^{s-1} f_j T_1^j.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung im Weierstraß'schen Vorbereitungssatz folgt:

$$\bar{Q}_0 + \sum_{\nu=1}^{t} \omega_\nu' \bar{Q}_\nu - f' = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{t} \omega_{\nu j} \bar{Q}_\nu = f_j.$$

Um den Satz zu beweisen, genügt es offenbar das zweite Gleichungssystem zu algebraisieren. Da das zweite Gleichungssystem nur von T_2 und T_3 abhängt, können wir unser Lemma anwenden und der Satz ist bewiesen.

Beweis des Lemmas. Sei $a_{ik} = T_1^{\rho_{ik}} a'_{ik}$ und a'_{ik} T_2-allgemein. Sei o.B.d.a. ρ_{11} minimal (sonst ordnen wir die Gleichungen und die Variablen X_i um). Wir wenden nun auf die a'_{j1} den Weierstraß'schen Vorbereitungssatz für algebraische Potenzreihen an und erhalten

$$a_{jk} = \tilde{a}_{jk} a'_{j1} + \sum_{l=0}^{s_j-1} a_{jkl} T_2^l$$

$$b_{jk} = \tilde{b}_{jk} a'_{j1} + \sum_{l=0}^{s_j-1} b_{jkl} T_2^l$$

$$c_j = \tilde{c}_j a'_{j1} + \sum_{l=0}^{s_j-1} c_{jl} T_2^l$$

Damit können wir unser Gleichungssystem in der folgenden Gestalt schreiben:

$$a'_{j1}(T_1^{\rho_{j1}} \bar{x}_1 + \Sigma\, \tilde{a}_{jk} \bar{x}_k + \Sigma\, \tilde{b}_{jk} \bar{y}_k - \tilde{c}_j) + \Sigma\, a_{jkl} T_2^l \bar{x}_k +$$
$$+ \Sigma\, b_{jkl} T_2^l \bar{y}_k = \Sigma\, c_{jl}\, T_2^l.$$

Wenn wir weiterhin $T_2^l \bar{x}_k = \bar{\bar{x}}_{kjl} a'_{j1} + \sum_{r=0}^{s_j-1} \bar{x}_{kjlr}\, T_2^r$ setzen, erhalten wir schließlich

$$a'_{j1}(T_1^{\rho_{j1}} \bar{x}_1 + \Sigma \tilde{a}_{jk} \bar{x}_k + \Sigma\, \tilde{b}_{jk} \bar{y}_k + \Sigma\, a_{jkl}\, \bar{\bar{x}}_{jkl} - \tilde{c}_j) +$$
$$+ \Sigma\, a_{jkl} \bar{x}_{kjlr}\, T_2^r + \Sigma\, b_{jkl} T_2^l \bar{y}_k = \Sigma\, c_{jl} T_2^l.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung im Weierstraß'schen Vorbereitungssatz erhalten wir daraus das folgende Gleichungssystem:

$$(1) \qquad T_1^{\rho_{j1}} \bar{x}_1 + \Sigma\, \tilde{a}_{jk} \bar{x}_k + \Sigma\, \tilde{b}_{jk} \bar{y}_k + \Sigma\, a_{jkl} \bar{\bar{x}}_{jkl} = \tilde{c}_j$$

$$(2) \qquad \Sigma\, a_{jkl} \bar{x}_{kjlr} + \Sigma\, b_{jkl} \bar{y}_k = c_{jl}.$$

Das zweite Gleichungssystem ist über $k\langle T_1 \rangle$ definiert und hat formale Lösungen in $k[[T_1]]$.
Nun war ρ_{11} minimal. Wir können das aus s Gleichungen bestehende System (1) zu dem folgenden dazu äquivalenten Gleichungssystem umformen:

$$T_1^{\rho_{11}} \bar{x}_1 + \sum_{k=2}^{n} \tilde{a}_{1k} \bar{x}_k + \Sigma\, a_{1kl}\, \bar{\bar{x}}_{1kl} + \Sigma\, \tilde{b}_{1k} \bar{y}_k = \tilde{c}_1$$
$$\sum_{k=2}^{n} \tilde{\tilde{a}}_{2k} \bar{x}_k + \Sigma\, \tilde{a}_{jkl} \bar{\bar{x}}_{jkl} + \Sigma\, \tilde{\tilde{b}}_{2k} \bar{y}_k = \tilde{\tilde{c}}_2$$
$$\vdots$$

Wir haben damit das Problem auf die Lösung von $s-1$ Gleichungen un der Algebraisierung eines Gleichungssystems über $k\langle T_1 \rangle$ reduziert Wenn wir nämlich für die letzten $s-1$ Gleichungen und die Gleichung (2 eine Lösung $(x_2, \ldots, x_n, \bar{\bar{x}}_{111}, \ldots, y_1, \ldots, y_m)$ gefunden haben mit x $\bar{\bar{x}}_{jkl} \in k\langle T_1, T_2 \rangle$ und $y_i \in k\langle T_1 \rangle$ und $y_i \equiv \bar{y}_i \mod T_1^N$ für genügen großes N, dann können wir daraus eine Lösung für das gesamte Syster konstruieren, weil $T_1^{\rho_{11}}$ ein Teiler von a_{ik} ist und demzufolge auch ei Teiler von $\tilde{a}_{jk}$ und a_{jkl} (wegen der Minimalität von ρ_{11} und da a T_2 — allgemein ist).
Wir können nun induktiv über die Anzahl s der Gleichungen schließer Dazu müssen wir noch folgenden Hilfssatz beweisen:
Hilfssatz: Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b_1 y_1 + \ldots + b_m Y_m = c$$

$$d_{11} Y_1 + \ldots + d_{1m} Y_m + e_{11} Z_1 + \ldots + e_{1t} Z_t = f_1$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$d_{l1} Y_1 + \ldots + d_{lm} Y_m + e_{l1} Z_1 + \ldots + e_{lt} Z_t = f_l$$

mit $a_i, b_i, c \in k\langle T_1, T_2 \rangle$ und $f_i, d_{ij}, e_{ij} \in k\langle T_1 \rangle$. Wenn dieses Systen eine formale Lösung $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ hat mit $\bar{x}_i \in k[[T_1, T_2]], \bar{y}_i \in k[[T_1]], \bar{z}_i \in k$ $[[T_1]]$, dann gibt es zu vorgegebenen $N > 0$ eine algebraische Lösung (x_i, y_j, z_k) mit $x_i \in k\langle T_1, T_2 \rangle, y_i, z_k \in k\langle T_1 \rangle$ und $y_i \equiv \bar{y}_i \mod T_1^N$
Beweis. Sei $a_i = T_1^{\rho_i} a'_i$ und a'_i T_2-allgemein. Wir können wieder o.B.d.A. voraussetzen, daß ρ_1 minimal ist. Sei nun eine formale Lösung $(\bar{x}_i, \bar{y}_k, \bar{z}_l$ mit der obigen Eigenschaft gegeben. Indem wir mit unserem Gleichungs- system und mit a'_1 analog zum vorigen System verfahren, können wi es auf folgende Gestalt bringen (analoge Bezeichnungen, nur alles ohne Index j):

$$T_1^{\rho_1} \bar{x}_1 + \sum_{k=2}^{n} \tilde{a}_k \bar{x}_k + \Sigma\, \tilde{b}_k \bar{y}_k + \Sigma\, a_{kl} \bar{\bar{x}}_{kl} = \tilde{c} \qquad (*)$$

$$(3) \qquad \left.\begin{aligned} \Sigma\, a_{kl} \bar{x}_{klr} + \Sigma\, b_{kl} \bar{y}_k &= c_l \\ \Sigma\, d_{lk} \bar{y}_k + \Sigma\, e_{lk} \bar{z}_k &= f_l \end{aligned}\right\}.$$

Das Gleichungssystem (3) ist nun über $k\langle T_1 \rangle$ definiert und hat formale Lösungen aus $k[[T_1]]$. Nach dem Artinschen Approximationssatz [1] kann man für beliebig großes N (wir wählen es aber auf alle Fälle größer ρ_1) eine Lösung (x_{klr}, y_k, z_k) aus $k\langle T_1 \rangle$ finden, die mit der formalen modulo T_1^N übereinstimmt. Wegen der Minimalität von ρ_1 folgt nun, daß $T_1^{\rho_1}$ a_i teilt. Daraus folgert man sofort da $a'_1 T_2$ — allgemein, daß, $T_1^{\rho_1}$ auch die $\tilde{a}_k$ und a_{kl} teilt. Dann können wir aber die Lösung (y_k) in die Gleichung (*) einsetzen und die $\bar{x}_k$ und $\bar{\bar{x}}_{kl}$ geeignet zu algebraischen Potenzreihen

abändern, so daß die Gleichung erfüllt ist (die Abänderungen werden alle von $\bar{x}_1$ ausgeglichen).
Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

4. BEWEIS DER DIVISIONSFORMEL

Sei $\mathcal{S}$ ein reduzierendes System, $\Lambda \leqslant k\ \langle T \rangle$ ein System zu $\mathcal{S}$. Wenn $\mathcal{S}$ nicht das triviale System $(\infty, \ldots, \infty)$ ist, so ist der leere Multiindex $\emptyset$ endlich bezüglich $\mathcal{S}$, d.h. $\emptyset^* = s_1$ daher ist das zu diesem Multiindex gehörige Element von Λ automatischen T_1-allgemein. Beachtet man die Eindeutigkeitsaussage (A) aus Abschnitt 2, so läßt sich das Ergebnis von Abschnitt 3 folgendermaßen formulieren :

(*) Sei $f \in k\ \langle T \rangle$, und die Gleichung $f = \sum_\nu Q_\nu \omega_\nu$ für die Potenzreihen Q_ν habe eine formale Lösung $\bar{Q}_\nu$ mit
$\bar{Q}_\nu \in k[[T_{i+1}, \ldots, T_m]]$ für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$, so sind alle
$\bar{Q}_\nu$ algebraische Potenzreihen.

Wir zeigen nun, daß sich jede algebraische Potenzreihe eindeutig als Summe einer solchen Linearkombination der ω_ν und einer reduzierten Potenzreihe darstellen läßt.

Wir definieren ein reduzierendes System $\tilde{\mathcal{S}}$ durch :
$\tilde{s}_1 = s_1$; seinen $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_i$ schon definiert, so sei für einen im Definitionsbereich von $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_i)$ gelegenen Multiindex ν

$$\tilde{s}_{i+1}(\nu) = \begin{cases} s_{i+1}(\nu) & \text{für } \nu \text{ endlich zu } \mathcal{S} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $\tilde{\mathcal{S}} \geqslant \mathcal{S}$ und es gibt nur endlich viele zu $\tilde{\mathcal{S}}$ reduzierte Multiindizes. Sei nun $\tilde{\omega}_\nu = \omega_\nu$ für ν endlich zu $\mathcal{S}$ und $\tilde{\omega}_\nu = T^{\nu^*}$ für ν endlich zu $\tilde{\mathcal{S}}$, aber nicht endlich zu $\mathcal{S}$. Damit erhalten wir ein System von Weierstraßpolynomen zu $\tilde{\mathcal{S}}$. Sei nun $h \in k \langle T \rangle$, so ist $h = \sum_\nu Q_\nu \tilde{\omega}_\nu + r$ mit r reduziert zu $\tilde{\mathcal{S}}$ (also auch zu $\mathcal{S}$) und $Q_\nu \in k\ [[T_{i+1}, \ldots, T_m]]$ für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$. Da r ein Polynom ist, gilt $f := h - r \in k\ \langle T \rangle$, daher sind nach (*) alle $Q_\nu \in k \langle T \rangle$. Nach Konstruktion ist aber für diejenigen ν die nicht endlich zu $\mathcal{S}$ sind, die algebraische Potenzreihe $Q_\nu T^{\nu^*}$ reduziert zu $\mathcal{S}$, woraus die Behauptung folgt. Wir haben damit das folgende Resultat gewonnen.

Satz : Sei m eine der Zahlen 1,2, 3 und $\Lambda \subseteq k \langle T_1, \ldots, T_m \rangle$ sei ein zu $\mathcal{S}$ gehöriges System, $\Lambda = \{\omega_\nu\}$. Dann gibt es für jedes $h \in k \langle T \rangle$ eindeutig bestimmte Q_ν, $r \in k\ \langle T \rangle$, so daß $h = \sum_\nu Q_\nu \omega_\nu + r$ ist, r reduziert und Q_ν für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$ nur von den Unbestimmten $T_{i+1}, \ldots, T_m$ abhängt.

Die Autoren danken Herrn C. Bănică für den Hinweis auf zwei kürzlich erschienene Arbeiten von Forster und Knorr in den Mathematischen Annalen und von Galligo, die sich ebenfalls mit Vorbereitungssätzen vom Weierstraßschen Typ befassen.

Eingegangen am 11. Oktober 1974

Humboldt Universität zu Berlin, Sektion Mathematik,
Unter den Linden 6, Berlin, DDR.

LITERATUR

1. Artin, M., *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publ. Math. IHES, 1969, *36*.
2. Grauert, H. *Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen*, Inv. Math., 1972, *15*.
3. Kurke, H., Pfister, G., Roczen, M., *Henselsche Ringe und algebraische Geometrie*, Berlin 1974.
4. Lafon, P., *Théorème de préparation de Weierstrass et séries formelles algébriques*, Notas Comm. Math. Recife, Pernambuco, Brasil, 1966, *11*.
5. Pfister, G., *Ringe mit Approximationseigenschaft*, Math. Nachrichten, 1973, *57*.
6. Roczen, M., *Eine Bemerkung zum Vorbereitungssatz von Weierstrass-Grauert*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 1974, **XIX**, *10*.